

# Eksempler på temaopgaver i matematik indenfor geometri

---

Med udgangspunkt i begrebsafklaringen fra dokumentet "*Matematik og den ny skriftlighed*" gives her fem eksempler på, hvordan de forskellige opgavetyper, der indgår i en samlet temaopgave, kan se ud indenfor et konkret emneområde: *Geometri*.

Der fokuseres i det følgende på nedenstående typer af opgaver (citat fra dokumentet "*Matematik og den ny skriftlighed*"):

*Matematikopgaver* med forskellig grad af kompleksitet inden for temaet. Opgaverne kan være stillet af læreren eller af andre elever. Der skelnes mellem følgende opgavetyper:

- Mindre træningsopgaver, der træner et emne eller en metode.
- Tidligere stillede eksamensopgaver eller vejledende eksamensopgaver, der har til formål at vise kravene til eksamen.
- Mere krævende matematikopgaver (der ikke kan kategoriseres under en af de øvrige) og som indeholder større grad af kompleksitet end træningsopgaver og eksamensopgaver.

*Formidlingsopgaver*, hvor temaet (eller dele heraf) formidles på forskellig måde afhængig af modtager. Dette kan både være formidling af et emne (fx et referat af et forløb) og formidling af teori eller beviser.

*Projektrapporter*. Disse vil tage udgangspunkt i en problemformulering, som læreren eller eleven udformer. Projekter er af undersøgende karakter og arbejdet vil være mindre lærerstyret end i de øvrige opgavetyper. Projektet kan fx omhandle matematiske ræsonnementer. Projektrapporten bør i sin endelige udformning være en sammenhængende tekst og kan bruges som træning i at skrive matematikholdige tekster, herunder SRO, SRP, AT-synopsis og SSO. Projektrapporten vil indeholde følgende dele:

- Problemfelt
- Redegørelse for metode (numerisk, formel eller syntetisk)
- Behandling af problem
- Konklusion

I forlængelse af præsentationen af opgaverne findes kommentarer til deres indhold m.m.

De fem eksempler kan enten bruges som selvstændige temaopgaver eller sættes sammen til en større temaopgave. Dette kan tilrettelægges på flere måder. Eleverne kan på forhånd få en opgavebeskrivelse af den samlede temaopgave, eller de kan få de enkelte dele efterhånden. Et hold

vil nok ikke vælge at lave alle fem eksempler om geometri, men kun et udvalg af dem. Hvorvidt temaopgaven opbevares i en elektronisk eller fysisk mappe, må ligeledes være op til den enkelte lærer og elev.

# Temaopgave: n-kanter

---

Formål: At udvikle og træne logiske, matematiske ræsonnementer.

Arbejdsform: Individuelt arbejde – med mulighed for samarbejde undervejs.

Produkt: Et resumé med formidling samt besvarelse af opgaver.

Du skal svare på spørgsmålene i dette dokument. Skriv besvarelserne ind i dokumentet efter spørgsmålene – og gem dokumentet på din egen computer. I må gerne arbejde sammen, men du skal skrive selv.

Det er vigtigt, at du ikke blot skriver i stikord, men i hele sætninger, når du svarer på spørgsmålene. Du skal altså ikke bare skrive svaret, men huske argumenter for dit svar. Tænk på, at en klassekammerat skal kunne læse svaret, uden at have været igennem det samme forløb som dig.

Brug så korrekt *matematisk notation*, som du kan.

Opgaverne skal ikke afleveres samlet, men du skal specielt vise din lærer dine svar på spørgsmål 4, 10 og 12. Og du skal til slut skrive et kort resume af dine spørgsmål (se spørgsmål 16) – det skal afleveres.

I en trekant er vinkel  $A=29^\circ$  og vinkel  $B=58^\circ$

1. Bestem størrelsen af den sidste vinkel, dvs. vinkel C

Tegn en sekskant – enten på et stykke papir eller i et geometriprogram. Del den ind ud fra skitsen nedenfor:



2. Hvad er vinkelsummen i sekskanten? Husk, du skal (stadig) argumentere for dit svar.
3. Gør noget lignende med en otte-kant – hvad er vinkelsummen her?

Du skal nu forsøge at kombinere de to opgaver ovenfor – kan du se en sammenhæng mellem dine argumenter?

4. Opstil på baggrund af seks- og otte-kanten *en formel* for vinkelsummen i en n-kant. Det vil sige, at du angive en formel, som kan bruges til at udregne vinkelsummen i en figur med n kanter.

5. Brug din formel til at regne vinkelsummen i en 24-kant.

En geometrisk figur kaldes *regulær*, hvis alle vinkler og sider er lige store.

6. Hvordan ser en regulær trekant ud – og hvad kaldes den også?
7. Hvor store er vinklerne i en regulær trekant?
8. Hvor store er vinklerne i en regulær sekskant?
9. ... Hvad med en regulær otte-kant?
10. Opstil en *formel* for den enkelte vinkel i en regulær n-kant. Forsøg at bruge en matematisk formel.

Du skal nu betragte dine *regulære figurer* som *fliser*, der kan lægges i en indgang til et hus.



Det viser sig nemlig, at man skal tænke lidt over, hvilke *regulære fliser* man køber ind, hvis man gerne vil have en indkørsel uden mellemrum mellem fliserne!

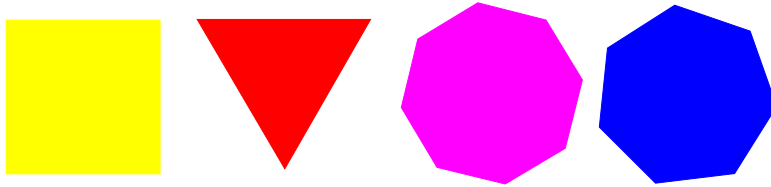
11. Kig på billedet ovenfor, og beskriv med ord, hvad sker de steder, hvor fliserne mødes med andre fliser. Hvilke krav er der til flisernes vinkler i disse "møder"?

Du skulle nu gerne have nået frem til, at det ikke er ligegyldigt, hvilken form de regulære fliser har.

12. Hvilke former af *regulære n-kanter* kan fliserne have, for at du kan lykkes med at dække en indgang med *ens fliser*, uden at der opstår mellemrum mellem fliserne?
13. Kan du bruge 12-kanter til denne opgave? Hvorfor/hvorfor ikke?
14. Kan du udelukke nogen flisetyper?

Som en afsluttende del af opgaven skal du nu prøve at lave et mønster af fliser, som ikke kun består af ens regulære fliser. Men kravet er igen: Der må ikke være mellemrum mellem fliserne.

15. Fliselæg en indkørsel med *regulære  $n$ -kant fliser*. Argumenter for, hvilke kombinationer af fliser, du bruger undervejs.



16. Skriv et kort resume (ca. 20 linjer) af dine arbejdsgange, og svar på *spørgsmålene 1-14*. Resuméet skal skrives, så det kan læses af en klassekammerat, som ikke har arbejdet med spørgsmålene. Husk de vigtigste punkter.

---

#### **Kommentarer til temaopgaven *n*-kanter**

Denne temaopgave består primært af små træningsopgaver med en indlagt formidlingsopgave (opgave 16). Temaopgaven har fokus på at redegøre for teori og i mindre grad på at regne matematikopgaver.

Temaopgaven indeholder ligeledes et element af undersøgende karakter (spørgsmål 15).

Afleveringsdelen er resuméet og understreger dermed temaopgavens placering som en formidlingsopgave. Men der er indlagt "kontrolfaser" i forbindelse med opgave 4, 10 og 14.

Opgaven er primært henvendt til matematik C eller 1. g.

---

# Temaopgave: Landmåling

**Formål:** Formålet med denne temaopgave er at skabe indsigt i, hvordan trigonometri bliver anvendt i praksis.

**Arbejdsform:** Gruppearbejde.

**Produkt:** Opgaven består af tre dele med hver sit problem med tilhørende underpunkter. Besvarelsene til hver af de tre dele samles i en projektrapport. Husk at gøre rede for metoderne i de forskellige dele ved brug af *et passende antal mellemregninger, en forklarende tekst samt en skitse og evt. et billede af situationen.*

I de opgaver, hvor I selv skal bestemme længder eller højder, kan I med fordel tage billeder (fx med jeres mobiltelefon) og inkludere i rapporten. Billedet kan ikke erstatte en skitse.

**Materiale:** Gyldendals Gymnasimatematik grundbog B1 side 34 til 46 samt udleverede noter fra Knud Erik Nielsen og Esper Fogh, Naturfag for 1. g (HAX-data2000) skal ligge til grund for opgavens besvarelse.

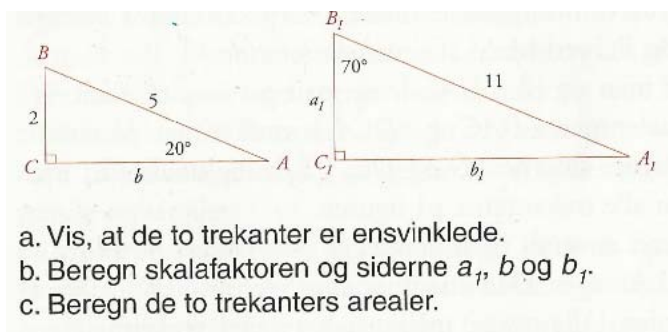
*Bemærk: Træningsopgaver skal ikke med i den endelige temaopgave, men er lektier til den pågældende dag.*

## Del 1: Afstandsmåling med ensvinklede trekanter

**Litteratur:** Nielsen & Fogh: side 188 og 189 Grundbogen: s. 34-39 (se ovenfor)

**Problemfelt:** Hvordan måler man en højde ved brug af ensvinklede trekanter?

**Træningsopgaver:**



Efter Nielsen & Fogh opgave 175 side 198. Gengivet med tilladelse fra forlaget.

### Underpunkter

- Redegør for, hvilken matematik det er nødvendigt at have kendskab til for at **besvare** problemfeltet? Opskriv nødvendige begreber, formler definitioner, sætninger osv.
- Kom med to eksempler på hvordan man bestemmer en højde. Husk en præcis og uddybende forklaring af metoden, hvor I bruger begreber og sætninger fra del a).
- Hvilke styrker og svagheder er der ved metoden?

**Konklusion:** Skriv en sammenhængende konklusion, der indeholder, hvad I er kommet frem til. Husk, at konklusionen skal **besvare** problemfeltet.

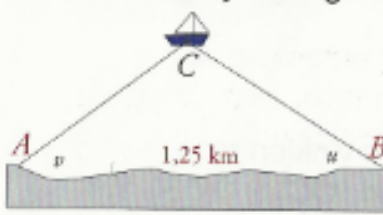
## Del 2: Afstandsmåling vha. vinkelmåling.

**Litteratur:** Nielsen & Fogh: side 188 og 189 Grundbogen: s. 34-39 (se ovenfor)

**Problemfelt:** Hvordan bestemmer man afstande mellem to punkter og højder af genstande ved at måle vinkler?

**Træningsopgaver:** 192 side 199 i Nielsen & Fogh. (se ovenfor)

192. Et skib sejler langs en lige kyststrækning, hvor der er to sømærker  $A$  og  $B$ . Længden  $|AB|$  er 1,25 km. Med et sigteapparat måles vinklerne ved kysten til  $v = 35,2^\circ$  og  $u = 31,7^\circ$ .



a. Hvor langt er stykket  $|CB|$ ?

b. Hvad er skibets vinkelrette afstand fra kysten?

Efter Nielsen & Fogh opgave 190 og 192 side 199. Gengivet med tilladelse fra forlaget

### Underpunkter

- Redegør for, hvilken matematik det er nødvendigt at have kendskab for at kunne løse dette problem? Opskriv nødvendige begreber, formler definitioner, sætninger osv.
- Beskriv, hvordan man gør, når man skal bestemme en længde og en højde. Brug en teodolit til at måle vinkler med, og husk en præcis og uddybende forklaring af metoden, hvor I bruger begreber og sætninger fra del a).
- Hvilke styrker og svagheder er der ved metoden? Sammenlign denne metode med metoden i første del.

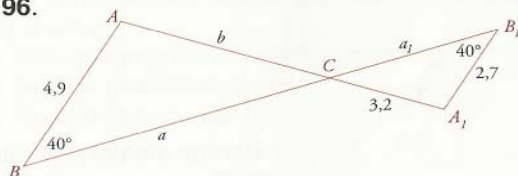
**Konklusion:** Skriv en sammenhængende konklusion om, hvad I er kommet frem til. Husk, at konklusionen skal svare på problemstillingen.

### Del 3: Tegning af kort ved triangulering.

**Litteratur:** Nielsen & Fogh: side 196 og 197 Grundbogen: s. 40-46 (se ovenfor).

**Træningsopgaver:** Opgave 196 og 200 side 200 i Nielsen & Fogh (se ovenfor).

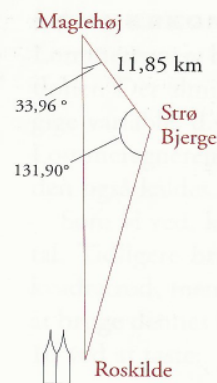
196.



De to trekanter er ensvinklede, fordi  $\angle B = \angle B_1$ , og de to topvinkler ved  $C$  er lige store. Beregn  $b$ ,  $a$  og  $a_1$ .

Efter Nielsen & Fogh opgave 196 og 200 side 200-201. Gengivet med tilladelse fra forlaget.

200. Fra Maglehøj ved Frederiksværk kan man i klart vejr netop se spirene på Roskilde Domkirke. I Strø Bjerge syd for Skævinge kan man finde et trigonometrisk punkt, der i luftlinie ligger 11,85 km fra Maglehøj. Vinklerne  $u$  og  $v$  kan med en teodolit måles til henholdsvis  $33,96^\circ$  og  $131,90^\circ$ . Beregn afstanden fra Maglehøj til Roskilde Domkirke.



**Problemfelt:** Hvordan laver man et præcist kort over et område?

#### Underpunkter

- Redegør for, hvad triangulering er. Hvilke matematiske begreber, formler, definitioner osv. er nødvendige at have kendskab til for at forstå, hvad triangulering er?
- Beskriv, hvordan man gør ved at tegne et kort. Husk en præcis og uddybende forklaring af metoden, hvor vigtige begreber fremhæves.
- Hvilke styrker og svagheder er der ved metoden? Sammenlign denne metode med metoderne i de to første dele.

**Konklusion:** Skriv en sammenhængende konklusion om, hvad I er kommet frem til. Husk, at konklusionen skal svare på problemstillingen.

#### Kommentarer til temaopgaven *landmåling*

Denne temaopgave består af tre dele, som tilsammen udgør en projektrapport – den følger meget stringent overvejelser om problemfelt, redegørelse for metoder, behandling af problem og konklusion. Formidlingsdelene/ræsonnementet er bundet op til det givne problemfelt og udgør således en del af den undersøgende karakter i projektdelen.

Projektrapporten kan sammen med træningsopgaverne udgøre en temaopgave eller indgå med andre opgave i en større temaopgave der også kan pege mere eller mindre frem mod den skriftlige eksamen. Temaopgaven består altså for eleven af træningsopgaverne samt projektrapporten, mens det kun projektrapporten der afleveres og rettes af læreren. Træningsopgaverne kan evt. rettes af andre elever i gruppen eller gennemgås i løbet af timerne.



# Temaopgave: Klassisk geometri

---

## Formål

I dette forløb skal du forsøge at bruge matematiske metoder til at nå frem til sammenhænge for geometriske figurer. Disse skal formuleres som matematiske sætninger som du skal argumentere for.

## Produkt

I skal i grupper aflevere en temaopgave på ca. 3 sider bestående af svar på arbejdsopgørgsmålene nedenfor. Temaopgaven skal danne baggrund for en fremlæggelse, hvor I skal "overbevise" jeres klassekammerater om de sammenhænge, sætninger og argumenter I har fundet.

## Arbejdsopgørgsmål

Konstruer en tilfældig trekant vha. jeres CAS-værktøj, og tegn de tre vinkelhalveringslinjer. Deformer trekanten (ved at flytte rundt på dens hjørner), og undersøg, om I kan afsløre en egenskab ved de tre vinkelhalveringslinjer og deres skæringspunkt.

- Formuler resultatet som en sætning, og overvej, hvorfor det kan passe.

Tegn en cirkel med centrum i vinkelhalveringslinjernes skæringspunkt, og juster cirkelens radius, så den netop rammer alle tre sider i trekanten (dvs. cirklen tangerer siderne i trekanten). Lav så om på trekantens form (ved at trække i et hjørne), og se, om I kan justere cirklen, så den stadig tangerer alle tre sider.

- Formuler resultatet som en sætning, og overvej, hvorfor det kan passe.

*(Tilsvarende spørgsmål om midtnormaler og omskrevne cirkel, medianer og højder kan tilføjes, hvis det ønskes – eventuelt deles ud på forskellige grupper.)*

Konstruer en firkant, og forbind de fire sideres midtpunkter, så der dannes en ny firkant inden i den første. Deformer den store firkant, og hold øje med den lille.

- Hvad ser der ud til at gælde for den? Prøv at formulere en sætning, der omhandler denne opdagelse, og overvej, hvorfor den kan passe.

Arbejdsform: pararbejde

Materialer: Noter om klassisk geometri.

---

## Kommentarer til temaopgaven *klassisk geometri*

Denne temaopgave er i udgangspunktet en formidlingsopgave, men har ikke en klassisk opbygning. Den indeholder dog både problemfelt, metoderedegørelse, behandling af problem og konklusioner. Og der er eksperimenterende/undersøgende dele, samt krav til ræsonnement.

Desuden indeholder temaopgaven en formidlingsopgave, fordi sammenhænge og argumenter skal fremlægges for resten af klassen – gennem det nedskrevne.

Der kan yderligere indlægges kortere skriveøvelser i den indledende del, f.eks. hurtigskrivning om alt hvad eleverne på forhånd ved om trekanter, og differentiering, hvis dette ønskes.

Forud for arbejdet med temaopgaven ligger et kort forløb om klassisk geometri, herunder matematikkens opbygning.

---

# Temaopgave: Cosinus- og sinusrelationer

---

## Formål

At arbejde med og forstå et geometrisk bevis. At skrive noter for at skabe overblik over bevis. Træning af mundtlig og skriftlig dimension.

## Materiale

Kopieret materiale fra tre forskellige matematikbøger med de to beviser, samt ti udvalgte eksamensopgaver inden for emnet.

## Arbejdsform

Gruppearbejde.

## Produkt

Mundtlige fremlæggelser for resten af klassen med baggrund i en "drejebog", som ikke skal afleveres.

Besvarelse af udvalgte eksamensopgaver (som uploades til klassens elektroniske platform).

Retning og kommentering af en anden gruppes opgavebesvarelser (som sendes tilbage til gruppen, der har udarbejdet den).

## Arbejdsgang

Studielæs de tre beviser, samtidigt med at I tager noter på et stykke papir. Hvilket af de tre beviser foretrækker I? Redegør for, hvorfor I foretrækker dette bevis (denne forklaring skal med i jeres mundtlige fremlæggelse).

Gennemarbejd nu jeres udvalgte beviser, så I kan fremlægge det (lav en "drejebog").

Udvælg fem opgaver fra materialet, som I ønsker at løse. Klargør argumenterne for, hvorfor I vælger netop disse opgaver. Forklaringen skal stå som indledning på jeres besvarelse. Udarbejd besvarelsen, og upload den til klassens konference.

Hent en anden gruppes besvarelse af fem opgaver ned fra konferencen. Ret og kommenter disse opgaver. Gennemlæs kommenteringen af jeres egne besvarelser

---

## Kommentarer til temaopgaven *cosinus og sinusrelationer*

Denne temaopgave indeholder mange forskellige dele. Der indgår skriveøvelser (i den indledende del af bevisførelsen), matematikopgaver (tidligere stillede eksamensopgaver), formidlingsopgaver ("drejebogen" til fremlæggelsen, redegørelser undervejs).

Retning og kommentering af andre gruppers opgaver inddrager forskellige dele af ovenstående.

Alt efter hvordan man ønsker aflevering og fremlæggelse, kan der skrues på de forskellige dele.  
Herunder hvor meget, der skal rettes af læreren og af elever.

---

# Temaopgave: Afstande i plan og rum

---

## Formål

At skabe overblik over afstandsberregning i plan og rum – både med hensyn til beregninger og med hensyn til beviser.

## Materiale

Grundbogens indhold om afstande og afstandsberregning (Jensen, Jessen og Overgård Nielsen: Matema10k A-niveau).

I skal i gruppen udvælge centrale afstandsberregninger [her kan man som lærer justere, hvad man ønsker skal med]. Desuden skal I vælge en sætning for en afstandsformel, som I ønsker at bevise.

## Arbejdsform

Gruppearbejde.

## Produkt

Skriv en temaopgave, der indeholder oversigt over, hvad I vurderer, der er centrale afstandsberregninger i plan og rum. Rapporten skal indeholde eksempler på afstandsberregninger (enten som opgaver fra bog eller andet eller selvproducerede), og den skal indeholde mindst et eksempel på bevis for sætning for en afstandsformel.

Målgruppen for opgaven skal være elever på samme niveau som jer.

Rapporten skal være i elektronisk form, så den kan formidles til resten af klassen.

---

## Kommentarer til temaopgaven *Afstande i plan og rum*

Denne temaopgave indeholder eksempler på formidlingsopgaver, idet målet er at formidle beviserne. Materialet kan justeres efter ønske. Eleverne kan selv finde eksempler på opgaver, eller de kan få som opgave at konstruere opgaver. Det kan gøre mere eller mindre frit for den enkelte gruppe at vælge sætning, der skal bevises.

Denne temaopgave gør det nemt at niveaudifferentiere, da eleverne selv skal vælge, hvilken sætning der skal bevises, og de lægger dermed selv niveauet for temaopgaven og det tilhørende mundtlig eksamensspørgsmål. Det er afgørende, at eleverne får dette at vide på forhånd.

---

# Eksempler på eksamensspørgsmål til geometri ud fra temaopgaver

---

Følgende eksamensspørgsmål er formuleret ud fra eksemplerne på temaopgaver i geometri.

## C-niveau

### Geometri

Redegør for n-kanter på baggrund af din temaopgave 'n-kanter'.

## B-niveau

### Geometri

Redegør for landmåling på baggrund af din temaopgave 'landmåling'.

## B- eller A-niveau

### Geometri

Redegør for landmåling på baggrund af din temaopgave 'landmåling'.

Fremlæg og bevis cosinusrelationen.

## A-niveau

### Geometri og vektorer

Redegør for klassisk geometri på baggrund af din temaopgave 'klassisk geometri'.

Udvælg eksempler på sætninger, og fremlæg mindst ét bevis<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Vi har diskuteret, om kravet i formuleringerne er klare nok. Det er naturligvis afgørende, at læreren grundigt orienterer om, hvordan valg har betydning for karakteren. Desuden er spørgsmålet et eksamensspørgsmål på A-niveau. Den enkelte elever skal hjælpes til at vælge et eller flere beviser, som vedkommende magter at fremlægge.

## A-niveau

### Geometri og vektorer

På baggrund af din temaopgave 'afstande i plan og rum' skal du redegøre for beregning af afstande i plan og rum.

Vælg selv én eller flere sætninger om afstande<sup>1</sup>, og bevis den valgte sætning eller de valgte sætninger.

Morten Overgård Nielsen, Katja Kofod Svan, Janus Lylloff, Peter Pedersen og Lars Bo Kristensen