Bjørn Grøn

Det gyldne snit og Fibonacci-tallene

Det gyldne snit og Fibonacci-tallene

Forudsætninger:

- Kendskab til ligedannethed. Grundlæggende geometrisk viden.
- Kendskab til andengradsligningen.
- Grundlæggende symbolmanipulation, herunder kvadratsætninger.

Forløbet:

1. Præsentation af emnet med vægt på det gyldne snit.

2. Grupperne arbejder og forventes at have nået mindst til og med øvelse 6.2 i løbet af de første to lektioner.

3. Fælles samling:
   a. Afklaring af eventuelle spørgsmål
   b. Præsentation af Fibonacci-tallene
   c. Præsentation af idéen i et induktionsbevis

4. Grupperne arbejder videre og tager hurtigt fat på afsnittet om Fibonacci-tallene.

Hver gruppe afleverer en rapport. Rapporten skal indeholde:

- en præsentation med dine egne ord af, hvad det gyldne snit er i kunst, arkitektur mv., og hvad det har med matematik at gøre (se evt. netadressen i punkt 5).
- løsning af øvelserne om det gyldne snit til og med øvelse 7.1
- en præsentation med dine egne ord af, hvad Fibonacci-tallene er, hvor de optræder i vores omverden, og hvad de har med det gyldne snit at gøre. (se evt. netadressen i punkt 5).
- løsning af øvelserne om Fibonacci-tallene til og med øvelse 13.

Hver gruppe laver enten øvelse 7.2 eller finder en anden geometrisk opgave på nettet, som de løser i stedet.

Det gyldne snit

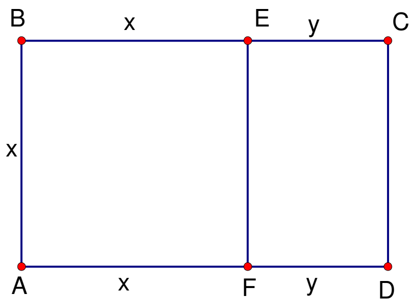
1. Du opsøger selv via leksika, fagbøger eller internet informationer om »det gyldne snit« Du skal have sat dig ind i det på en sådan måde, at du med egne ord kan give en mundtlig og skriftlig fremstilling af det.

2. Den følgende matematiske del om det gyldne snit er bygget op gennem øvelser, som du selv arbejder igennem. En øvelse begynder med, at der står <u>ØVELSE NR…</u>, og den slutter med, at der er angivet . I hver øvelse er der spørgsmål, du skal svare på, eller udregninger, du nærmere skal redegøre for.

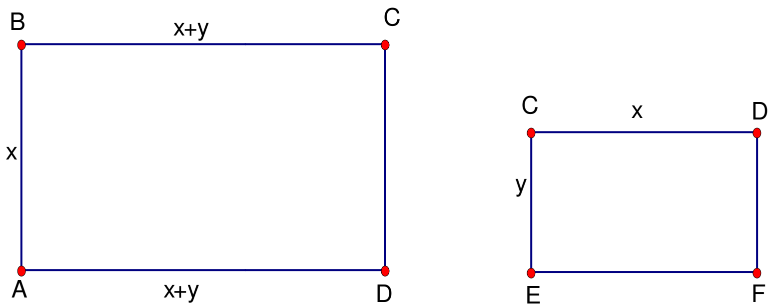
Ind imellem øvelserne er der givet definitioner og anført forskellige bemærkninger.

<u>DEFINITION</u>

Et rektangel *ABCD* kaldes et *gyldent rektangel*, hvis det opfylder følgende:
Når vi skærer et kvadrat *ABEF* væk, så får vi et nyt rektangel *ECDF*,



som er *ligedannet* med det store rektangel *ABCD*:



BEMÆRKNING.
Når rektanglerne er ligedannede gælder

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}, \qquad (1)$$

dvs. forholdet mellem den lange og den korte side er ens for de to rektangler.

<u>DEFINITION</u>

I et gyldent rektangel kaldes forholdet mellem den lange side og den korte side for *det gyldne snit* og betegnes med det græske bogstav Φ (udtales »phi« eller »fi«), dvs.

$$\Phi = \frac{x}{y} \text{ (eller } \Phi = \frac{x+y}{x}\text{)}.$$

ØVELSE 1

(*Beregning af det gyldne snit*)

Gør nøje rede for hvert skridt i det følgende:

Formel (1) omskrives til $xy + y^2 = x^2$ eller $x^2 - xy - y^2 = 0$.

Ligningen omskrives videre til $\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} - 1 = 0$. (2a)

Læg mærke til at det ikke er *x* eller *y*, men derimod forholdet $\frac{x}{y}$, som er det gyldne snit, og som vi er interesseret i at beregne. $\frac{x}{y}$ er altså den ukendte størrelse og findes som en løsning til andengradsligningen $z^2 - z - 1 = 0$. (2b)

Vis at løsningen er $z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Heraf kan vi konkludere: *Det gyldne snit er lig med* $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618...$ (3)

ØVELSE 2

Den anden løsning betegnes af og til Φ'. Med denne betegnelse har vi altså, at

$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ og $\Phi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ er løsningerne til andengradsligningen $z^2 - z - 1 = 0$.

Redegør for at der gælder, at $\Phi + \Phi' = 1$ og $\Phi \cdot \Phi' = -1$.

ØVELSE 3

Hvis et gyldent rektangel har siden *x* som den lange side og siden *y* som den korte side, så er

$$\Phi = \frac{\text{den lange side}}{\text{den korte side}} = \frac{x}{y} \quad (4)$$

Indsæt i $\Phi \cdot \Phi' = -1$ og vis, at $\Phi' = -\frac{\text{den korte side}}{\text{den lange side}} = -\frac{y}{x}$. (5)

Redegør også for at $\Phi' = -\frac{x}{x+y}$.

ØVELSE 4

(*Tilnærmet konstruktion af det gyldne snit*)

Læg linjestykkerne i forlængelse af hinanden:

Vi ønsker at finde ud af, hvor stor en del x udgør af hele længden $x + y$.
Vis at svaret på dette er $-\Phi'$ eller tilnærmet 0,618…
Dvs. x udgør ca. 62 % af hele linjestykket. Vi skal således udmåle 62% af linjestykket og dér afsætte et mærke, når et linjestykke skal deles i et forhold som det gyldne snit. Vi kan naturligvis måle ud fra hvert endepunkt, så der bliver to gyldne snit på en linje.

ØVELSE 5.1

Hvordan skal man dele et linjestykke på 20, således at de to stykker kan udgøre siderne i et gyldent rektangel?

ØVELSE 5.2

Vi har givet et linjestykke på 12. Vi ønsker at dette skal udgøre den korte side i et gyldent rektangel. Hvor stor skal den lange side være?

Bemærk at udtrykket $\Phi = \dfrac{\text{den lange side}}{\text{den korte side}}$, der gælder for et gyldent rektangel, kan omskrives til $\text{den korte side} \cdot \Phi = \text{den lange side}$.

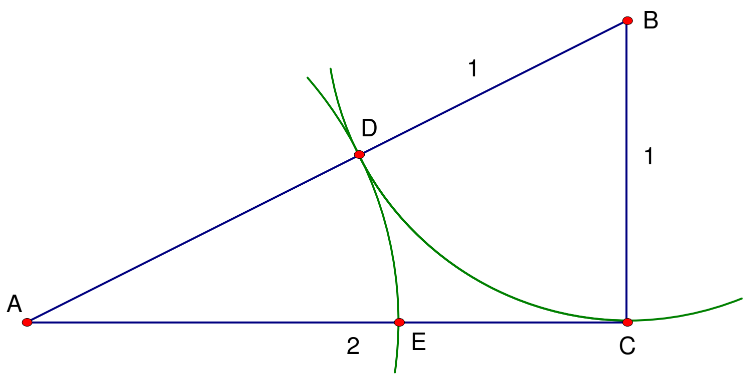
ØVELSE 5.3

Vi ønsker at lave et gyldent rektangel med areal 40. Hvor lange skal siderne være?

ØVELSE 6.1

(*Eksakt konstruktion af det gyldne snit*)

(Bemærk: Dette er den geometriske konstruktion svarende til beregningerne i øvelse 5.1.)
Konstruér en retvinklet trekant, hvor den længste katete er 2 (enheder), og den korte katete er 1 (enhed) – se figuren.

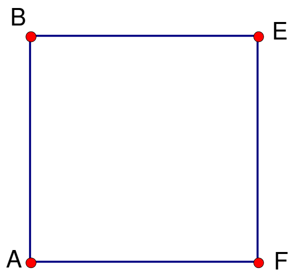


Med en passer konstrueres en cirkel med centrum i B og radius $|CB| = 1$.
Skæringspunktet med AB kaldes D.
Med passeren tegnes en cirkel med centrum i A og radius $|AD|$.
Skæringspunktet med AC kaldes E.
Vis nu at $\dfrac{|AC|}{|AE|} = \dfrac{2}{\sqrt{5}-1}$.
Vis at dette kan omskrives til $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, dvs. det er lig med tallet Φ.
Konklusion: Konstruktionen med de to cirkelbuer deler AC i det gyldne snit.

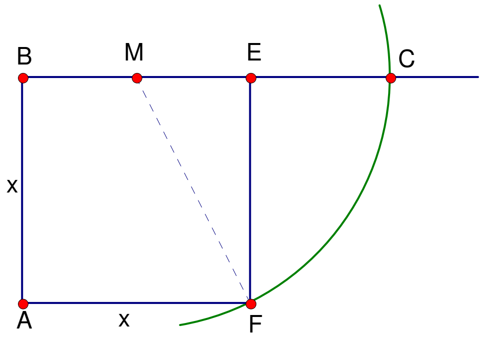
<u>ØVELSE 6.2</u>

(*Geometrisk konstruktion af et gyldent rektangel ud fra et givet kvadrat*)

(Bemærk: Dette er den geometriske konstruktion svarende til beregningen i øvelse 5.2.)
Vi har givet et kvadrat med sidelængde x



og ønsker at konstruere et rektangel $ABCD$, som er et gyldent rektangel.
Lav følgende konstruktion (se tegningen):
BE halveres, og vi finder midtpunktet M. Med M som centrum og $|MF|$ som radius tegnes en cirkel.
Denne cirkel skærer forlængelsen af BE i et punkt C.



Påstand: Siden BC er nu den lange side i et gyldent rektangel, hvor siden AB er den korte side, dvs. rektanglet $ABCD$ er gyldent, hvor D findes på forlængelsen af AF.
Bevis påstanden, dvs. bevis følgende at $\dfrac{|BC|}{|BA|} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$.

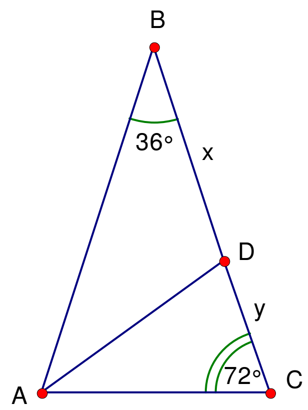
ØVELSE 7.1

Tegn en ligebenet trekant med topvinkel 36°.
Vinklerne ved grundlinjen er så 72°.

Halvér vinkel *A*.
Skæringspunktet med siden *BC* kaldes *D*.

Vis at *ACD* er ensvinklet med *BAC*

Argumentér for at siderne *AD* og *BD* har samme længde, som vi kalder *x*.



Længden af *DC* kaldes *y*.

Vis at $\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$.

Omskriv til $x^2 - xy - y^2 = 0$.

Argumentér for at forholdet mellem siderne *x* og *y* i trekant *ADC* er lig med det gyldne snit.
Formuler dette som en sætning om denne type trekant.
(Trekanter med disse vinkler kaldes af og til for *gyldne trekanter*.)

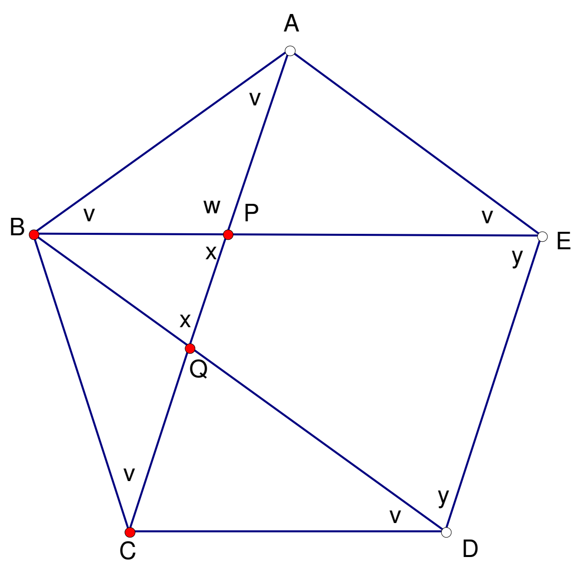
ØVELSE 7.2

Tegn en regulær femkant *ABCDE*, dvs. en femkant, hvor siderne og vinklerne er lige store.

Tegn også diagonalerne *AC*, *BE* og *BD*. Argumentér for at vinklerne i en femkant, f.eks. hele vinkel *E*, er 108°.

Gå på jagt efter ligebenede trekanter inde i femkanten, og argumenter for at vinklerne markeret med *v* faktisk er lige store. (Hjælp: Begynd f.eks. med at se på trekant *ABE* og udregn, hvor stor v er).

Argumentér for at vinklerne markeret *x* er lige store, og at *x* = 2*v*. (Hjælp: se først på vinklen markeret *w*.)



Argumentér for at vinklerne markeret *y* er lige store, og at de derfor må være lig med *x*.
Vis at 3*v* = 108°, og altså at *v* = 36°. Heraf får vi: *x* = *y* = 72°.
Angiv mindst 3 *gyldne trekanter* inde i femkanten.

Udnyt dette til at vise at $\frac{|CQ|}{|QP|} = \frac{|CP|}{|PA|} = \Phi$.

Konklusion: Diagonalerne skærer hinanden op i gyldne snit.

Fibonacci-tallene

3. Læs den engelske version af Leonardo af Pisa's kanin-problem.
   Leonardo af Pisa kaldes ofte Fibonacci. Han levede i Norditalien omkring år 1200 og var med at gøre den højtudviklede arabiske matematik kendt i Europa. Han ydede bl.a. et stort bidrag til, at de arabiske tal blev kendt og efterhånden anvendt i stedet for romertallene.
   Kaninproblemet gav anledning til at studere den mærkelige talrække
   1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …,
   som siden er blevet kaldt Fibonacci-tallene.
   Giv en kort præsentation af kaninproblemet, hvor du bl.a. redegør for, hvad det har med Fibonacci-tallene at gøre.

4. Den følgende matematiske del om Fibonacci-tallene er bygget op gennem øvelser, som du selv arbejder igennem. En øvelse begynder med, at der står ØVELSE NR…, og den slutter med, at der er angivet . I hver øvelse er der spørgsmål, du skal svare på, eller udregninger, du nærmere skal redegøre for.

DEFINITION

Fibonacci-tallene er den talfølge
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …,
der opstår ved, at »det næste element« dannes som summen af de to foregående (dette kaldes i matematik en »rekursiv definition«). Med symboler kan dette udtrykkes således:

- Lad u_n betegne det n'te tal i talfølgen (f.eks. $u_1 = 1$, $u_6 = 8$, $u_8 = 21$, osv.)
- Reglen om »det næste element« kan så skrives således:

$$u_{n-2} + u_{n-1} = u_n \tag{6}$$

ØVELSE 8

Opskriv de første 15 Fibonacci-tal i et skema som dette:

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}
1	1	2	3											

ØVELSE 9

Indtast Fibonacci-tallene som en talfølge i dit CAS-værktøj. Hertil skal du først omstille maskinens program til talfølger (ændring i »mode«). Der er plads til flere talfølger, og du indtaster f.eks. i den første, som hedder $u1$. Det 4. tal og det n'te tal i følgen hedder i maskinens sprog u1(4) og u1(n). Reglen om »det næste element«, som er formuleret i (6), indtastes så. Endelig skal du give begyndelsesværdier, og dette er de første to tal i følgen, der indskrives således: {1,1}. I *Table* kan du nu se følgens tal. Hvad er Fibonacci-tal nr. 40?

ØVELSE 10

Udregn forholdet mellem ét tal i Fibonacci-talfølgen og det foregående tal, dvs.:

$$\frac{u_2}{u_1}, \frac{u_3}{u_2}, \frac{u_4}{u_3}, \frac{u_5}{u_4}, \ldots$$

Kan du se et mønster – et tal, som denne følge nærmer sig?

Udregn tilsvarende:

$$\frac{u_1}{u_2},\frac{u_2}{u_3},\frac{u_3}{u_4},\frac{u_4}{u_5},...$$

Hvilket tal nærmer denne følge sig tilsyneladende?

ØVELSE 11

Lad os kalde brøkerne fra forrige øvelse $a_1, a_2, a_3, ...$, dvs.

$$a_1 = \frac{u_2}{u_1} = 1 \qquad a_2 = \frac{u_3}{u_2} = 2 \qquad a_3 = \frac{u_4}{u_3} = 1{,}5$$

Lav en tallinje med en stor enhed, f.eks. 8 eller 10 cm. Afsæt et så stort antal af tallene i talfølgen $a_1, a_2, a_3, ...$, at du kan svare på følgende: Beskriv med ord det mønster, du ser.

DEFINITION

(*Grænseværdi*)

Antag vi har en talfølge $a_1, a_2, a_3, ...$

Hvis der findes et bestemt tal a_0, som talfølgens elementer nærmer sig mere og mere, jo længere vi går frem i følgen, så siger vi, at a_0 er *grænseværdien* for talfølgen, og vi skriver $a_n \to 0$ når $n \to \infty$. (Læses: »a_n går mod a_0, når n går mod uendelig.«)

BEMÆRKNING

Udtrykket »nærmer sig mere og mere« betyder: Hvis vi ønsker at komme tættere på a_∞ end en given lille forskel på f.eks. 0,0001, så kan vi finde et bestemt trin i talfølgen, hvorfra alle følgende tal er så tæt på som ønsket.

PÅSTAND

Vi vil tage vores eksperiment med udregning og afsætning på tallinjen som et argument for, at talfølgen $a_1, a_2, a_3, ...$ af brøker lavet ud fra Fibonacci-tallene faktisk har en grænseværdi (denne påstand vil vi bevise senere – se tillæg). Det ser ud, som om grænseværdien er tallet Φ. Kan vi bevise dette? *Det er opgaven i den næste øvelse.*

ØVELSE 12

(Når du er kommet igennem øvelsen og har fundet ud af, hvad x er, vend så tilbage og se, hvor x kom fra. Så får du et bedre overblik over, hvorfor vi foretager omskrivningerne.)

Lad os begynde med at kalde grænseværdien for x, dvs. $a_n \to x$ når $n \to \infty$.

Af definitionen på Fibonacci-tal har vi:

$$u_{n-2} + u_{n-1} = u_n \tag{6}$$

Vis dette kan omskrives til $\frac{u_n}{u_{n-1}} = 1 + \frac{u_{n-2}}{u_{n-1}}$. (7)

Vi ønsker at omskrive formel (7) til formel (8) nedenfor. Dertil har vi brug for følgende to ting:

1. $\frac{u_n}{u_{n-1}} = a_{n-1}$ 2. $\frac{u_{n-2}}{u_{n-1}} = \frac{1}{a_{n-2}}$ (vis det sidste ved at begynde med a_{n-2})

Indsættes 1. og 2. i (7), får vi

$$a_{n-1} = 1 + \frac{1}{a_{n-2}} \tag{8}$$

Når n bliver meget stor vil både a_{n-1} og a_{n-2} nærme sig grænseværdien x. Ligningen (8) gælder hele vejen. Derfor må der også »til sidst« gælde, at

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

Omskriv dette til

$$x^2 = x + 1 \text{ eller} \tag{9}$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \tag{10}$$

Argumenter nu for at $x = \Phi$ ved simpelthen at løse ligningen.
Da x var grænseværdien for a-følgen, ved vi derfor nu, at $a_n \to \Phi$ når $n \to \infty$.
Formuler dette resultat med ord.

BEMÆRKNING

Det er lidt besværligt at udregne Fibonacci-tal langt fremme i følgen, fordi vi skal arbejde os frem trin for trin. CAS-værktøjet er naturligvis en stor hjælp. Men kunne man finde en formel for udregning af et givet Fibonacci-tal, var det enklere. Og der findes faktisk en ganske mærkelig formel, som giver os mulighed for direkte at udregne f.eks. Fibonacci-tal nr. 37 eller nr. 73. Formlen blev fundet af en matematiker ved navn Binet, og når man ser den, tror man, det er løgn, at den formel altid giver et helt tal.

Fibonacci-tallene bliver hurtigt meget store, så formlen har hovedsagelig teoretisk interesse.
Som en hjælp til at vise formlen skal vi først klare følgende:

SÆTNING

Hvis tallet x opfylder $x^2 = x + 1$, så gælder for ethvert naturligt tal n, at

$$x^n = u_n \cdot x + u_{n-1}, \tag{11}$$

hvor u_n'erne er Fibonacci-tallene.
(Bemærk: Tallet x kender vi godt: Det er enten Φ eller Φ'.)

ØVELSE 13

(*Beviset for sætningen*)

Beviset laves trinvist, dvs. vi indser, det gælder for $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ osv. I hvert trin udnytter vi det, vi ved om x, nemlig at formel (9) gælder:
1. trin: Vi ved, at $x^2 = x + 1$, og det er det samme som $x^2 = u_2 \cdot x + u_1$ (hvorfor?).
2. trin: Vi ganger ligningen (9) igennem med x på begge sider og får $x^3 = x^2 + x$.
Vis at dette kan omskrives til $x^3 = 2x + 1$.
Men det er det samme som $x^3 = u_3 \cdot x + u_2$ (hvorfor?) (12)
3. trin: Vi ganger ligningen (12) igennem med x på begge sider og får $x^4 = u_3 \cdot x^2 + u_2 \cdot x$.
Vis at dette kan omskrives til $x^4 = (u_3 + u_2) \cdot x + u_3$.
Men det er det samme som $x^4 = u_4 \cdot x + u_3$ osv.
Lad os nu sige, at vi har vist formlen ind til trin nr. 9, dvs. vi har vist formlen

$$x^{10} = u_{10} \cdot x + u_9.$$

10. trin: Vi ganger… prøv selv at gennemføre dette trin, så du når frem til
$x^{11} = u_{11} \cdot x + u_{10}$.

Vi kan således altid komme et skridt yderligere fremad. Derfor siger vi, at sætningen er bevist ved den teknik, der kaldes *matematisk induktion*.

SÆTNING

(*Binets formel*)

Det n'te led i Fibonacci-talfølgen kan udregnes således:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \tag{13}$$

BEMÆRKNING

Prøv at udregne nogle eksempler, som u_5, u_8 og u_{30}, for at se, at formlen giver det ønskede.

ØVELSE 14

(*Beviset for Binets sætning*)

De to tal $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ og $\Phi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ er løsninger til ligningen $x^2 = x+1$,
så derfor gælder ifølge sætningen ovenfor og øvelse 13 for ethvert naturligt tal n:

$$\Phi^n = u_n \cdot \Phi + u_{n-1}$$
$$\Phi'^n = u_n \cdot \Phi' + u_{n-1}$$

Vis at du heraf kan få $\Phi^n - \Phi'^n = u_n \cdot (\Phi - \Phi')$.
Vis at $\Phi - \Phi' = 5$.
Indsættes dette, får vi $\Phi^n - \Phi'^n = u_n \cdot \sqrt{5}$.
Vis endelig at vi herfra får Binets formel.

5. Der findes på nettet et væld af adresser vedrørende Fibonacci-tallene.
På adressen http://www.mcs.surrey.ac.uk/personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html kan du finde en omfattende information. Prøv at gå ind på den og led efter:
   - Fibonacci-tal og det gyldne snit i naturen
   - Find på hjemmesiden mindst to matematiske sammenhænge, som ikke er omtalt i disse noter og gør rede for dem.

Tillæg

Dette tillæg handler om, hvorfor talfølgen af forhold mellem Fibonacci-tallene opfører sig som de gør, og som vi bl.a. så i øvelse 11.

ØVELSE 15

Betragt de første Fibonacci-tal:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_i	1	1	2	3	5	8	13	21	34

Læg mærke til:

$u_3 \cdot u_5 = 10$ og $u_4^2 = 9$

$u_5 \cdot u_7 = 65$ og $u_6^2 = 64$

$u_7 \cdot u_9 = 442$ og $u_8^2 = 441$

samt følgende:

$u_2 \cdot u_4 = 3$ og $u_3^2 = 4$

$u_4 \cdot u_6 = 24$ og $u_5^2 = 25$

$u_6 \cdot u_8 = 168$ og $u_7^2 = 169$

Formuler med ord de regler du kan se ud af dette mønster.

ØVELSE 16

Vi så i foregående øvelse, at vi af og til har brug for at skelne mellem lige tal (2, 4, 6, …) og ulige tal (1, 3, 5, …). Når vi skal ræsonnere matematisk om lige og ulige tal, er vi nødt til at kunne skelne mellem tallene ved hjælp af matematisk symbolsprog.

Det gør vi ved at skrive de lige tal som $2n$, eller $2n - 2$, eller $2n + 2$ osv., hvor n er et tilfældigt naturligt tal. De ulige tal skrives som $2n + 1$, $2n - 1$, $2n + 3$ osv. Et lige eller et ulige tal kan skrives på flere måder, f.eks.

$8 = 2 \cdot 4$ eller $8 = 2 \cdot 3 + 2$ eller $8 = 2 \cdot 5 - 2$ eller …

og $9 = 2 \cdot 4 + 1$ eller $9 = 2 \cdot 3 + 3$ eller $9 = 2 \cdot 5 - 1$ eller …

Det afgørende er, at vi får udtrykt, om 2 går op eller 2 ikke går op i tallet. Når vi skriver lige tal og ulige tal således, kan reglen fra øvelse 14 formuleres således:

For efterfølgende lige numre i Fibonacci-talfølgen (som u_6 og u_8) gælder:

$$u_{2n-2} \cdot u_{2n} = u_{2n-1}{}^2 - 1 \qquad (14)$$

For efterfølgende ulige numre i Fibonacci-talfølgen (som u_7 og u_9) gælder:

$$u_{2n-1} \cdot u_{2n+1} = u_{2n}{}^2 - 1 \qquad (15)$$

Dette vises trinvist med samme teknik, som vi anvendte i øvelse 13. Vi har set, at formlerne (14) og (15) gælder for Fibonacci-tallene op til u_9. Vi kunne blive ved et stykke tid endnu; men i stedet spørger vi nu:

Hvis formlerne (14) og (15) gælder op til en bestemt værdi af n, kan vi så vise, at de også gælder for de næste Fibonacci-tal? Hvis vi kan det, så siger vi, at formlerne er vist for alle tal ved hjælp af *matematisk induktion.* Vi ønsker at vise de næste to formler. Overvej at disse skrives:

$$u_{2n} \cdot u_{2n+2} = u_{2n+1}{}^2 - 1 \qquad (14')$$

$$u_{2n+1} \cdot u_{2n+3} = u_{2n+2}{}^2 - 1 \qquad (15')$$

Vi viser (14') ved at udregne venstre side og her benytte, at det er Fibonacci-tal.
(Gør nøje rede for hvert skridt i det følgende.)

$$
\begin{aligned}
&u_{2n} \cdot u_{2n+2} = \\
&u_{2n} \cdot \left(u_{2n} + u_{2n+1}\right) = \\
&{u_{2n}}^2 + u_{2n} \cdot u_{2n+1} = \\
&u_{2n-1} \cdot u_{2n+1} - 1 + u_{2n} \cdot u_{2n+1} = \\
&\left(u_{2n-1} + u_{2n}\right) \cdot u_{2n+1} - 1 = \\
&{u_{2n+1}}^2 - 1
\end{aligned}
$$

hvilket var det ønskede.

Prøv selv med samme metode at vise (15'), dvs. vise, at $u_{2n+1} \cdot u_{2n+3} = ... = {u_{2n+2}}^2 - 1$.

BEMÆRKNING

Find tilbage til de første udregninger af forholdet mellem Fibonacci-tallene og afsætning af disse på en tallinje. Vi kaldte for nemheds skyld:

$$a_1 = \frac{u_2}{u_1}, \quad a_2 = \frac{u_3}{u_2}, \quad a_3 = \frac{u_4}{u_3}, \quad \dots$$

For følgen $a_1, a_2, a_3, ...$ så vi følgende:

1. Forskellen mellem efterfølgende tal i a – følgen bliver mindre og mindre.
2. Tallene $a_2, a_4, a_6, ...$ (de lige numre) bliver mindre og mindre.
3. Tallene $a_1, a_3, a_5, ...$ (de ulige numre) bliver større og større.
4. For hvert trin i a-følgen bliver tallet skiftevis større og mindre end det foregående, dvs. a_2 er større end a_1, a_3 er mindre end a_2, a_4 er større end a_3, …

Tilsammen giver dette, at følgen af a-tal svinger frem og tilbage og langsomt nærmer sig en grænseværdi (som, vi i øvelse 12 beviste, var lig med Φ).
Vi beviser påstandene 1-4 ved hjælp af formlerne (14) og (15) fra øvelse 16.

ØVELSE 17

Formuler påstandene 2, 3 og 4 ved hjælp af symbolerne a_{2n}, a_{2n-2}, a_{2n-1} og a_{2n+1}.

ØVELSE 18

Påstand nr. 1: Forskellen mellem to efterfølgende tal udregnes:

$$a_{n-1} - a_{n-2} = \frac{u_n}{u_{n-1}} - \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} = \frac{u_n \cdot u_{n-2} \cdot {u_{n-1}}^2}{u_{n-1} \cdot u_{n-2}}$$

Argumenter for at $u_n \cdot u_{n-2} \cdot {u_{n-1}}^2 = \pm 1$.
Sammenfatter vi, har vi derfor:

$$a_{n-1} - a_{n-2} = \frac{\pm 1}{u_{n-1} \cdot u_{n-2}}$$

Tallene u_{n-1} og u_{n-2} bliver større og større, hvorfor brøken bliver mindre og mindre.

Konklusion: Forskellen mellem efterfølgende tal bliver mindre og mindre og nærmer sig 0, når n går mod uendelig.

Påstand nr. 2: Vi ser på tallene $a_2, a_4, a_6, ..., a_{2n}$ og vil vise, at $a_{2n} < a_{2n-2}$.
Overvej at dette udtrykker, at tallene bliver mindre og mindre.

Af (14) får vi:

$$u_{2n-2} \cdot u_{2n} = u_{2n-1}^{\ 2} - 1 < u_{2n-1}^{\ 2}$$

Vi regner nu videre (gør nøje rede for hvert skridt):

$$u_{2n-2} \cdot u_{2n} < u_{2n-1}^{\ 2} \qquad \Leftrightarrow$$
$$u_{2n-2} \cdot u_{2n} + u_{2n-2} \cdot u_{2n-1} < u_{2n-1}^{\ 2} + u_{2n-2} \cdot u_{2n-1} \qquad \Leftrightarrow$$
$$u_{2n-2} \cdot (u_{2n} + u_{2n-1}) < u_{2n-1} \cdot (u_{2n-1} + u_{2n-2}) \qquad \Leftrightarrow$$
$$u_{2n-2} \cdot u_{2n+1} < u_{2n-1} \cdot u_{2n} \qquad \Leftrightarrow$$
$$\frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} < \frac{u_{2n-1}}{u_{2n-2}}$$

eller:

$$a_{2n} < a_{2n-2}$$

Påstand nr. 3: Prøv selv at vise, at $a_{2n-1} < a_{2n+1}$, dvs. $\frac{u_{2n}}{u_{2n-1}} < \frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}}$, med brug af formel (15).

Påstand nr. 4: Formel (14) giver som nævnt:

$$u_{2n-2} \cdot u_{2n} < u_{2n-1}^{\ 2},$$

hvilket kan omskrives til:

$$\frac{u_{2n}}{u_{2n-1}} < \frac{u_{2n-1}}{u_{2n-2}}$$

eller:

$$a_{2n-1} < a_{2n-2} \tag{16}$$

Formel (15) giver tilsvarende:

$$u_{2n-1} \cdot u_{2n+1} < u_{2n}^{\ 2},$$

hvilket kan omskrives til:

$$\frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} < \frac{u_{2n}}{u_{2n-1}}$$

eller:

$$a_{2n} > a_{2n-1} \tag{17}$$

Prøv at anskueliggøre de to resultater fra (16) og (17) med $n = 4$, $n = 5$ og $n = 6$.
Konklusionen bliver, at for hvert trin bliver a-tallet skiftevis større og mindre.

Samlet har vi nu set, at a-følgens led svinger frem og tilbage, de lige numre bliver mindre, de ulige bliver større, mens forskellen mellem efterfølgende tal nærmer sig 0. Derfor må følgen have en grænseværdi.