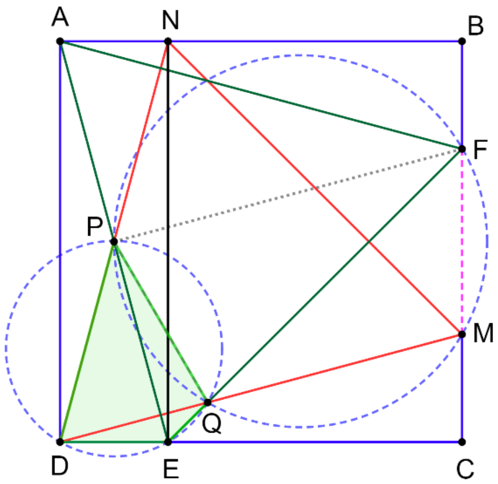
Svar 400

a. *1. metode*. De retvinklede trekanter DCM og DAN har lige lange hypotenuser DM og DN. Desuden er kateterne DC og DA lige lange. Derfor er de kongruente og $\angle MDC = \angle NDA$. Vi har, at



$$90° = \angle MDC + \angle NDM + \angle NDA$$

$$\Leftrightarrow \quad 90° = \angle MDC + 60° + \angle NDA$$

$$\Leftrightarrow \quad 30° = 2 \cdot \angle MDC \quad \Leftrightarrow \quad \angle MDC = 15° .$$

Så er også $\angle NDA = 15°$.

Dette medfører, at ΔDCM, ΔBAF, ΔADE og ΔDAN er indbyrdes kongruente, fordi de er retvinklede med lige lange kateter DC, CD og BA og desuden har et par lige store vinkler. Altså er

$$DE = CM = FB = NA .$$

I $\square DENA$ er to modstående sider DE og NA lige lange og parallelle, og de to vinkler EDA og DAN er rette, og dermed er firkanten et rektangel. De to diagonaler DN og AE halverer hinanden, så P er midtpunkt af AE. I den ligesidede ΔAEF er derfor FP højde, så $\angle PFE = 30°$.

Nu har vi så

$$DC = CB \quad \Leftrightarrow \quad DC - DE = CB - DE$$

$$\Leftrightarrow \quad DC - DE = CB - FB \quad \Leftrightarrow \quad EC = CF .$$

Så er ΔECF en retvinklet, ligebenet trekant og $\angle EFC = 45°$. Dermed er

$$\angle PFM = \angle PFC = \angle PFE + \angle EFC = 30° + 45° = 75° ,$$

og da desuden

$$\angle DMC = 90° - \angle MDC = 90° - 15° = 75° ,$$

er $\angle PFM = \angle DMC$, så $PF \| DM$ eller $PF \| QM$.

Videre er

$$\angle PDQ = 60° \quad \text{og} \quad \angle PEQ = 60° ,$$

hvilket medfører, at $\square PDEQ$ er indskrivelig. Lige store periferivinkler i den omskrevne cirkel giver

$$\angle QPE = \angle QDE = \angle MDC = 15°$$

og

$$\angle FPQ = \angle FPE - \angle QPE = 90° - 15° = 75° .$$

Idet

$$\angle FMQ = 180° - \angle CMQ = 180° - 75° = 105°$$

har vi, at

$$\angle FMQ + \angle FPQ = 180° ,$$

så $\square PQMF$ er indskrivelig, og da $PF \| QM$, er $\square PQMF$ et ligebenet trapez. Dermed er $PQ = FM$.

2. metode. Som i 1. metode ses, at

$$\angle MDC = \angle NDA = \angle BAF = \angle DAE = 15°.$$

Vi kan antage, at sidelængden i kvadratet er 1. Så er

$$AN = DE = CM = BF = \tan 15° \,, \qquad (1)$$

hvoraf

$$FM = CB - BF - MC = 1 - 2\tan 15° \,. \qquad (2)$$

Da $DE \,||\, AN$, er $\square ANED$ et rektangel, så DN og AE halverer hinanden. I ΔADE har vi

$$\cos\angle DAE = \frac{DA}{AE} \iff \cos 15° = \frac{1}{AE} \iff AE = \frac{1}{\cos 15°}$$

$$\iff PE = \tfrac{1}{2}AE = \frac{1}{2\cos 15°}. \qquad (3)$$

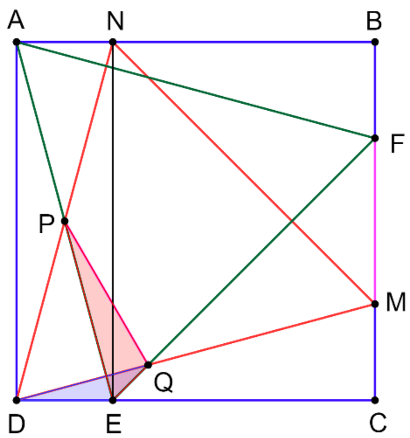
Da $FC = CE$, er ΔECF retvinklet og ligebenet, så $\angle QEC = 45°$ og $\angle QED = 135°$. I ΔDQE er så

$$\angle EQD = 180° - \angle QED - \angle QDE = 180° - 135° - 15° = 30°.$$

Sinusrelationerne i ΔDQE giver ved hjælp af (1):

$$\frac{QE}{\sin 15°} = \frac{DE}{\sin 30°} \iff QE = 2 \cdot DE \cdot \sin 15°$$

$$\iff QE = 2 \cdot \sin 15° \cdot \tan 15° = \frac{2\sin^2 15°}{\cos 15°} \,. \qquad (4)$$



Vi har, at

$$\angle PEQ = \angle PEN + \angle NEQ$$

$$= 15° + 90° - \angle QEC = 60°.$$

Cosinusrelationen i ΔPEQ giver

$$PQ^2 = PE^2 + QE^2 - 2 \cdot PE \cdot QE \cdot \cos 60°.$$

Heri indsættes værdierne for PE og QE fra (3) og (4):

$$PQ^2 = \frac{1}{4\cos^2 15°} + \frac{4\sin^4 15°}{\cos^2 15°} - 2 \cdot \frac{1}{2\cos 15°} \cdot \frac{2\sin^2 15°}{\cos 15°} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4\cos^2 15°} + \frac{4\sin^4 15°}{\cos^2 15°} - \tan^2 15°.$$

Vi benytter de kendte (!) værdier

$$\sin^2 15° = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \;,\; \cos^2 15° = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \;,\; \tan 15° = 2 - \sqrt{3} \;,$$

og får

$$PQ^2 = \frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{4 \cdot \frac{7-4\sqrt{3}}{16}}{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} - \left(2-\sqrt{3}\right)^2 \,,$$

som reduceres til

$$PQ^2 = 21 - 12\sqrt{3} \;.$$

Efter (2) er

$$FM^2 = (1 - 2\tan 15°)^2 = \left(1-4+2\sqrt{3}\right)^2 = \left(2\sqrt{3}-3\right)^2 = 21-12\sqrt{3} = PQ^2 .$$

Dermed er det ønskede bevist.

b. *1. metode.* Vi har, at

$$\frac{MD}{DC} = \frac{1}{2} \ .$$

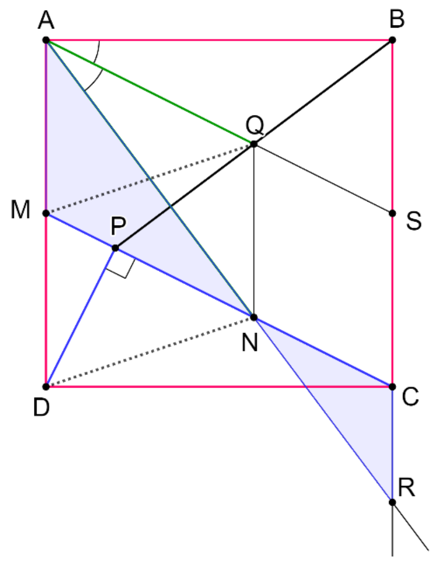
Nu er ΔDPM, ΔCPD og ΔCDM ensvinklede, så vi får

$$MP = \tfrac{1}{2} DP = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} PC = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 2NC = \tfrac{1}{2} NC \ ,$$

hvoraf

$$\frac{MN}{NC} = \frac{MP+PN}{NC} = \frac{MP+NC}{NC} = \frac{\frac{1}{2}NC+NC}{NC} = \frac{3}{2} . \qquad (1)$$

Lad forlængelsen af AN ud over N skære BC i R. Da ΔAMN og ΔRCN er ensvinklede, gælder efter (1):



$$\frac{AM}{CR} = \frac{MN}{NC} = \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad AM = \tfrac{3}{2} CR \ ,$$

hvilket giver

$$AD = 2AM = 3CR,$$

så at

$$AB = 3CR$$

og

$$BR = BC + CR = AB + CR = 4CR \ ,$$

hvoraf

$$\frac{AB}{BR} = \frac{3CR}{4CR} = \frac{3}{4} .$$

Dermed er ΔABR en 3-4-5-trekant, så

$$AB : BR : RA = 3 : 4 : 5 . \qquad (2)$$

Lad AQ skære BR i S. Sætningen om vinkelhalveringslinjens delingsforhold af den modstående side giver i ΔABR:

$$\frac{BS}{SR} = \frac{AB}{AR} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{BS}{SR} = \frac{3}{5} \quad \Leftrightarrow \quad BS = \tfrac{3}{5} SR \ .$$

Efter (2) er $BR = \tfrac{4}{3} AB$, så

$$BS + SR = \tfrac{4}{3} AB \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{3}{5} SR + SR = \tfrac{4}{3} AB \quad \Leftrightarrow \quad SR = \tfrac{5}{6} AB \ ,$$

så at

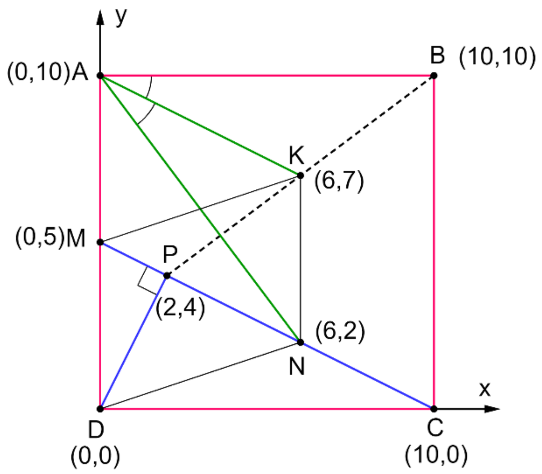
$$BS = BR - SR = \tfrac{4}{3} AB - SR = \tfrac{4}{3} AB - \tfrac{5}{6} AB = \tfrac{1}{2} AB \ ,$$

hvilket betyder, at S er midtpunktet af BC. Dermed er ΔABS og ΔCDM ensvinklede, hvor $\angle BAS = \angle DCM$, og dermed er $AS \parallel CM$.

I ΔBPC er S midtpunkt af BC og derfor er Q midtpunkt af BP. I ΔBPC er nu Q midtpunkt af BP og N midtpunkt af PC, så QN er parallel med CB og halvt så lang. Men så er QN parallel med MD og $QN = \tfrac{1}{2} CB = MD$. Dermed er $\square DMQN$ et parallelogram.

2. metode. Vi bruger analytisk geometri, som er den umiddelbare metode. Lad koordinatsystemet have D som begyndelsespunkt og lad DC være den positive x-akse og DA den positive y-akse. Vi indfører koordinaterne

$$A\,(0,10)\ \ ,\ \ C\,(10,0)\ \ ,\ \ B\,(10,10)\ .$$



Da DP er højde i den retvinklede ΔDCM, er som bekendt

$$\frac{CP}{PM} = \frac{DC^2}{DM^2} = \frac{10^2}{5^2} = 4\ .$$

Altså er $CP = 4PM$ eller $CP = \frac{4}{5}CM$.

Dette delingsforhold af CM giver koordinaterne til P, nemlig

$$\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CP} = (10,0) + \tfrac{4}{5}\overrightarrow{CM}$$
$$= (10,0) + \tfrac{4}{5}(-10,5) = (2,4).$$

Midtpunktet N af CP har koordinaterne

$$N:\ \tfrac{1}{2}\big((10,0)+(2,4)\big) = (6,2).$$

Lad nu K være det punkt, der gør $\square DMKN$ til et parallelogram. Så er

$$\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{DN} = (0,5)+(6,2) = (6,7).$$

Vi skal nu blot vise, at K er midtpunkt af BP og at $\angle NAK = \angle BAK$. Den første påstand følger af, at koordinaterne er

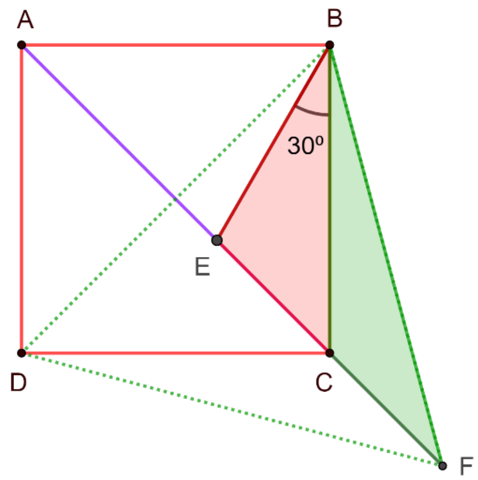
$$P\,(2,4)\ \ ,\ \ B\,(10,10)\ \ ,\ \ K\,(6,7)\ \ .$$

Afstandsformlen giver længderne

$$AN = 10\ \ ,\ \ AK = \sqrt{45}\ \ ,\ \ AB = 10\ \ ,\ \ BK = 5\ \ ,\ \ BN = 5\ .$$

Altså er ΔBAK og ΔANK kongruente, så de to vinkler $\angle NAK$ og $\angle BAK$ er lige store.

c. *1. metode.* Vi antager, at kvadratet har sidelængde 1. I ΔBEC giver sinusrelationen



$$\frac{CE}{\sin 30°} = \frac{BE}{\sin 45°} = \frac{BC}{\sin 105°}.$$

Dette giver

$$CE = \frac{BC\cdot \sin 30°}{\sin 105°} = \frac{\sin 30°}{\sin 75°}\ .$$

Nu er det kendt, at $\sin 75° = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$ så

$$CE = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)} = \frac{2}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\ .$$

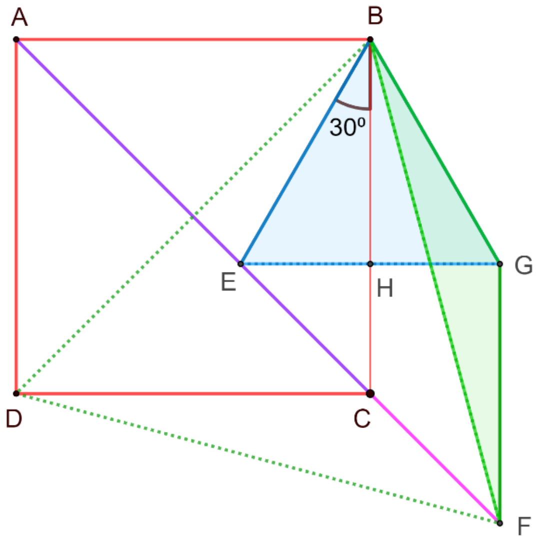
I ΔBCF giver cosinusrelationen

$$BF^2 = BC^2 + CF^2 - 2\cdot BC\cdot CF\cdot\cos 135° = 1 + CE^2 + 2\cdot CE\cdot\cos 45°$$

$$= 1 + \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \tfrac{1}{4}\left(6+2-2\sqrt{12}\right) + \tfrac{1}{2}\sqrt{12} - 1$$

$$= 2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{12} + \tfrac{1}{2}\sqrt{12} = 2.$$

Altså er $BF = \sqrt{2}$. Desuden er $BD = \sqrt{2}$ som diagonal i kvadratet. Da F ligger på midtnormalen AC for BD, er $DF = BF = \sqrt{2}$.



2. metode. Spejlbilledet af E i BC er G, og projektionen af E på BC er H. I ΔEGF er H og C midtpunkter af EG og EF, så $GF \parallel BC$.

Da $BE = BG$ og $\angle EBG = 60°$, er ΔBEG ligesidet og ΔEGF er en retvinklet ligebenet trekant. Dermed er $BG = EG = GF$.

I ΔBGF er

$$\angle BGF = \angle BGE + \angle EGF$$
$$= 60° + 90° = 150°.$$

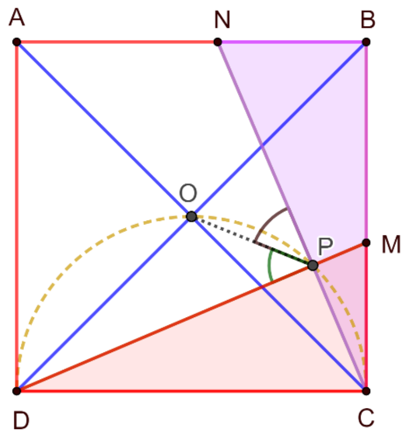
Da ΔBGF er ligebenet er så

$$\angle GFB = \tfrac{1}{2}\left(180° - \angle BGF\right) = 15°$$

og

$$\angle CFB = \angle CFG - \angle GFB = 45° - 15° = 30°\ .$$

Da F ligger på midtnormalen for BD, er også $\angle CFD = 30°$ og derfor $\angle BFD = 60°$. Da $FB = FD$, er ΔFDB ligesidet.



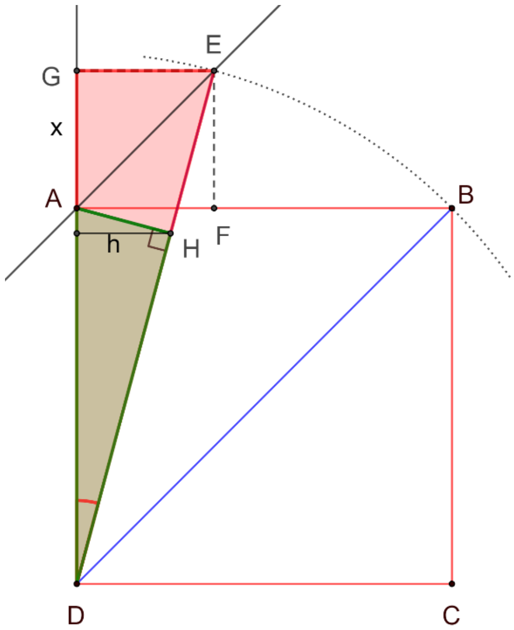
d. Vi har, at ΔDCM og ΔBCN er kongruente, og da $AB \perp BC$, er også $CN \perp DM$, så $\angle DPN$ er ret. Halvcirklen med diameter AB går derfor gennem P og O.

Nu er $\angle DCO = 45°$, så også $\angle DPO = 45°$, fordi de to vinkler som periferivinkler spænder over samme cirkelbue. Dermed er $\angle DPN$ halveret af PO.

e. *1. metode.* Projektionerne af E på AD og AB er G og F. Så er $\square AFEG$ et kvadrat. Vi sætter $AD = 1$ og $AG = AF = x$.

Idet $DE = \sqrt{2}$, giver Pythagoras i ΔDGE, at

$$(1+x)^2 + x^2 = \sqrt{2}^2 \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\ .$$



Vi kan herefter fortsætte ad trigonometrisk vej og får

$$\sin \angle ADE = \frac{GE}{DE} = \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \sin 15°.$$

Vi kan også give et euklidisk bevis. Lad *H* være projektionen af A på *DE*. Så er ΔDGE og ΔDHA ensvinklede, så

$$\frac{GE}{ED} = \frac{HA}{AD}$$

$$\Leftrightarrow \quad HA = \frac{GE \cdot AD}{ED} = \frac{x \cdot 1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} .$$

Vi benytter nu en kendt (!) sætning (se evt. neden for): Hvis en retvinklet trekant har spidse vinkler på 15° og 75°, gælder om højden h på hypotenusen c, at $c = 4h$. Der gælder også omvendt, at hvis $c = 4h$, er de spidse vinkler 15° og 75°.

Vi får ved brug af ovenstående, at

$$HA^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4} ,$$

så Pythagoras i ΔDHA giver, at

$$DH^2 = 1 - HA^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4} .$$

Dermed er

$$HA^2 \cdot DH^2 = \tfrac{1}{16} \quad \Leftrightarrow \quad HA \cdot DH = \tfrac{1}{4} ,$$

og arealet af ΔDHA er

$$[\Delta DHA] = \tfrac{1}{2} \cdot HA \cdot DH = \tfrac{1}{8} .$$

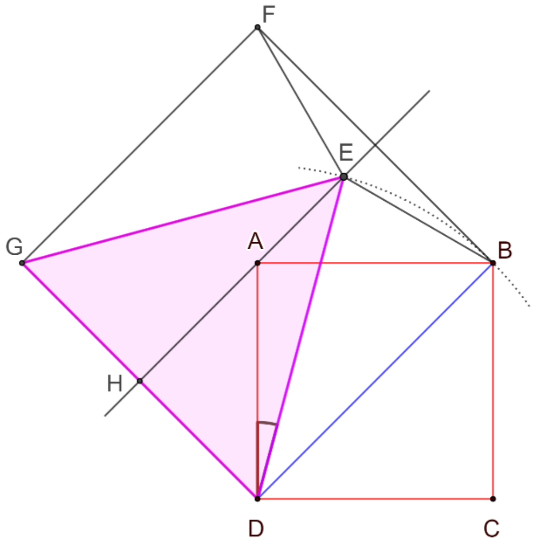
På den anden side er

$$[\Delta DHA] = \tfrac{1}{2} \cdot AD \cdot h = \tfrac{1}{2} h .$$

Af de sidste to ligninger følger, at $h = \tfrac{1}{4}$. Da højden altså er en fjerdedel af hypotenusen, følger af den nævnte sætning, at $\angle ADH = \angle ADE = 15°$.

2. metode. Vi foretager en spejling i linjen AE, hvorved B og D føres over i F og G. Så er

$$DB = DE = EG = GF\ .$$



Idet H er skæringspunktet mellem DG og AE, er længden af DH lig med halvdelen af længden af diagonalen i kvadratet $ABCD$, så DG er hele diagonallængden. Altså er $\square BDGF$ et kvadrat og ΔGED er ligesidet. Efter en kendt sætning (se neden for), er så

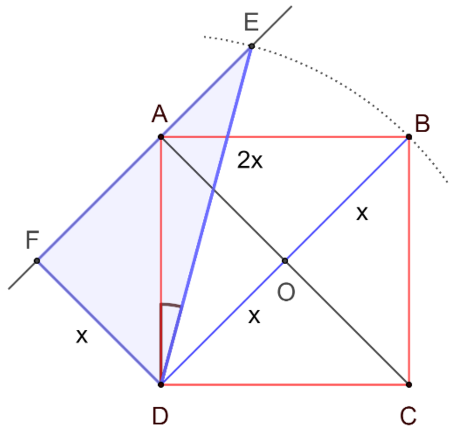
$$\angle ADE = \angle HDE - \angle HDA$$
$$= 60° - 45° = 15°.$$

3. metode. Diagonalerne i kvadratet skærer hinanden i O. Lad $\square AODF$ være et kvadrat med diagonalen AD. Hvis vi sætter

$$x = OD = OB\ ,$$

er $DF = x$ og $DB = DE = 2x$. I den retvinklede ΔDFE er så kateten DF halvt så lang som hypotenusen DE, så $\angle FDE = 60°$. Så er

$$\angle ADE = \angle FDE - \angle FDA = 60° - 45° = 15°.$$

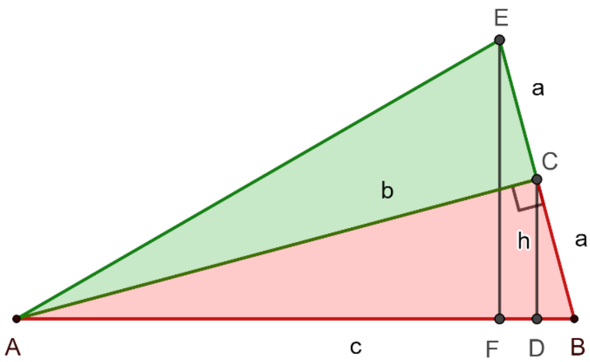


Bemærkning. For gods ordens skyld viser vi sætningen: En retvinklet trekant har spidse vinkler på 15° og 75° netop hvis længden af højden på hypotenusen er $\frac{1}{4}$ af hypotenusen.

Vi foretager en spejling af ΔABC i den længste katete b, så B føres over i E. Da er $AB = AE$.

Antag først, at $A = 15°$. Højden fra E i ΔAEB er EF. Da ΔAEF er en 30°-60°-90°-trekant, er

$$EF = \tfrac{1}{2}AE = \tfrac{1}{2}AB\,.$$



Da ΔEFB og ΔCDB er ensvinklede i forholdet 2:1, er $CD = \tfrac{1}{2}EF$, så

$$CD = \tfrac{1}{2}EF = \tfrac{1}{4}AE = \tfrac{1}{4}AB.$$

Antag så omvendt, at ΔABC er retvinklet og $h = \tfrac{1}{4}c$. Så er $EF = 2h = \tfrac{1}{2}c$. I den retvinklede ΔAEF er en katete halvt så lang som hypotenusen, så trekanten er en 30°-60°-90°-trekant. Dermed er $\angle EAF = 30°$, så $\angle CAB = 15°$.

f. *1. metode.* Vi ser, at $\square DEFC$ er indskrivelig. Så er $\angle EFD = \angle ECD$, da disse vinkler er periferivinkler over samme bue i den omskrevne cirkel.

Da ΔEDC og ΔEAB er kongruente, er

$$v = \angle ECD = \angle EBA.$$

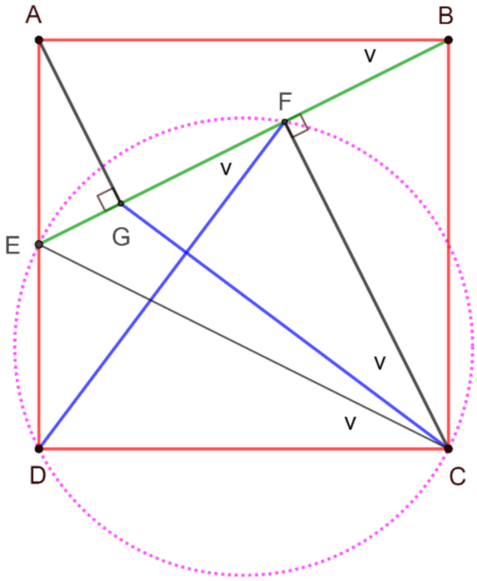
Da

$$\angle BEA = 90° - v = \angle FBC \ ,$$

er ΔBFC og ΔEAB ensvinklede, så $v = \angle BCF$. Så er

$$\angle DFC = 90° - v = \angle DCF \, .$$

Dette medfører, at ΔDFC er ligebenet med $DF = DC$.



Vi kan antage, at sidelængden i kvadratet er 2. Så er $BE = \sqrt{5}$. Da som nævnt ΔBFC og ΔEAB er ensvinklede, er

$$\frac{BF}{EA} = \frac{BC}{EB} \quad \Leftrightarrow \quad BF = \frac{2}{\sqrt{5}} \, .$$

I den retvinklede ΔEAB er AG højde, så

$$AG \cdot EB = AE \cdot AB \quad \Leftrightarrow \quad AG = \frac{1 \cdot 2}{\sqrt{5}} \, .$$

Pythagoras i ΔAEG giver

$$EG^2 = AE^2 - AG^2 = 1 - \left(\tfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \tfrac{1}{5} \, ,$$

så $EG = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Vi finder så, at

$$GF = BE - GE - BF = \sqrt{5} - \tfrac{1}{\sqrt{5}} - \tfrac{2}{\sqrt{5}} = \tfrac{2}{\sqrt{5}} \, .$$

Da altså $BF = GF$ og $CF \perp BG$, er ΔBCG ligebenet med $CB = CG$, dvs. vi har, at

$$CG = CB = DC = DF \, .$$

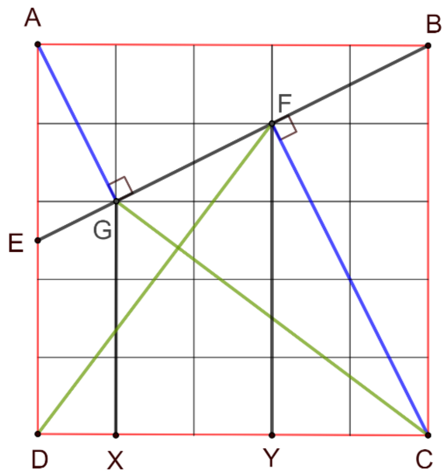
Det sidste lighedstegn fandt vi tidligere.

2. metode. Vi får en pludselig inspiration og anbringer kvadratet i et kvadratnet, så det får en sidelængde på 5. Punkterne F og G er så gitterpunkter, og hvis projektionerne af F og G på CD er Y og X, får vi i ΔGXC ved hjælp af Pythagoras, at

$$CG^2 = 3^2 + 4^2 \, .$$

I ΔFDY får vi

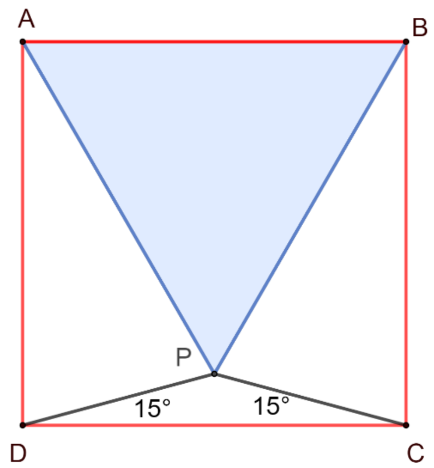
$$DF^2 = 3^2 + 4^2 \, .$$

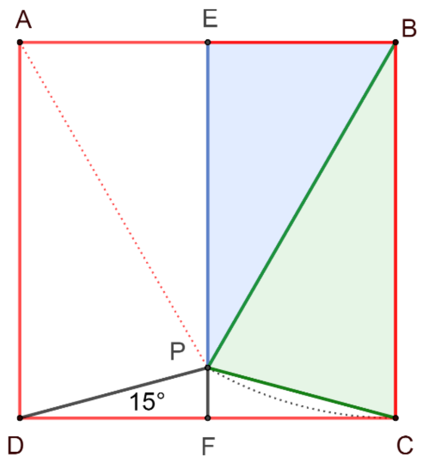


Tilføjelse

En 'vandreopgave' om kvadrater, der af og til dukker op i opgavelitteraturen, er følgende:

Opgave. I det indre af kvadratet *ABCD* ligger punktet *P*, så $\angle PDC = \angle PCD = 15°$. Vis, at ΔPAB er ligesidet.





Bevis 1. Lad *E* og *F* være midtpunkter af *AB* og *CD*. En cirkelbue med *B* som centrum og *BC* som radius skærer *EF* i *P*. I den retvinklede ΔEBP er hypotenusen *BP* dobbelt så lang som kateten *BE*, så det er en 30°-60°-90°-trekant, så $\angle EBP = 60°$ og $\angle EPB = 30°$. I den ligebenede ΔBPC er så

$$\angle BPC = \angle BCP = 75°,$$

og dermed $\angle PCD = 15°$. Altså er *P* det givne punkt.

Vi har, at *BC* = *BP* = *BA*, og da $\angle ABP = 60°$, er ΔABP ligebenet med en topvinkel på 60°. Altså er den ligesidet.

Bevis 2. Vi drejer ΔPCD omkring *C* i negativ omløbsretning, så *P* falder i *Q*. Så er

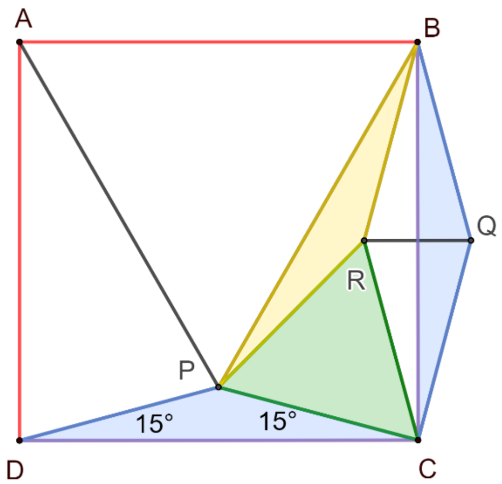
$$\angle QCB = \angle QBC = 15° \ .$$

Spejlbilledet af *Q* i *BC* er *R*. Så er ΔQBC og ΔRBC kongruente, og

$$\angle RBC = \angle RCB = 15° .$$

Nu er *CP* = *CR*, og

$$\angle RCP = 90° - \angle PCD - \angle RCB$$
$$= 90° - 15° - 15° = 60°.$$



Altså er ΔPRC ligesidet. Videre er

$$\angle PRB = 360° - \angle PRC - \angle BRC = 360° - 60° - 150° = 150°.$$

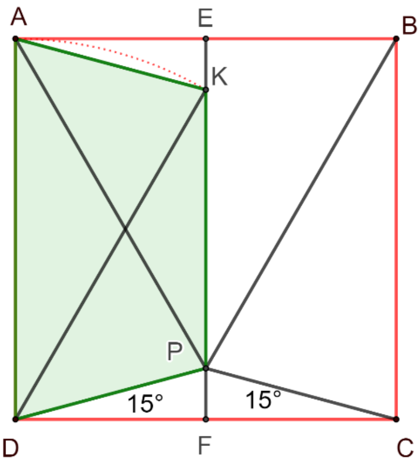
Da ΔBRP er ligebenet er så

$$\angle BPR = \angle RBP = 15°,$$

hvilket giver

$$\angle ABP = 90° - \angle RBP - \angle RBC = 90° - 15° - 15° = 60°.$$

Så er også $\angle BAP = 60°$ og dermed er ΔPAB ligesidet.



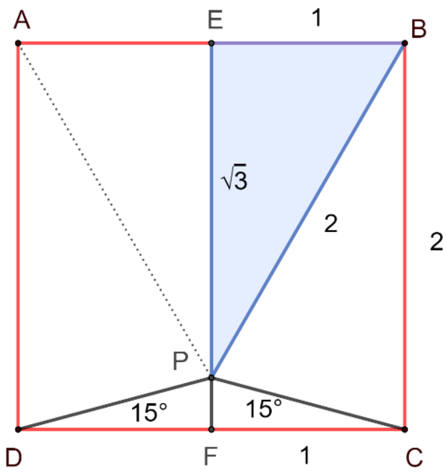
Bevis 3. Idet E og F er midtpunkter af AB og CD, afsætter vi K på EF, så $DK = DA$. I den retvinklede ΔDKF er hypotenusen DK dobbelt så lang som kateten DF, så ΔDKF er en 30°-60°-90°-trekant, hvor $\angle DKF = 30°$ og $\angle KDF = 60°$. Så er $\angle ADK = 30°$, så den ligebenede ΔDKA giver

$$\angle DAK = \angle DKA = 75° .$$

Desuden er

$$\angle PDK = \angle KDF - \angle PDF = 60° - 15° = 45° ,$$

så $\angle ADP = 75°$. Dermed er $\square AKPD$ et ligebenet trapez, hvis diagonaler er lige lange, dvs. $AP = KD = DA$. På grund af symmetri omkring midterlinjen EF er $PB = AP$. Dermed er ΔPAB ligesidet.



Bevis 4. Lad kvadratets sidelængde være 2 og E og F midtpunkter af AB og CD. Så gælder i ΔPFC, at

$$\tan 15° = \frac{PF}{FC} = PF ,$$

og

$$EP = EF - PF = 2 - \tan 15° .$$

Nu er det kendt (!), at $\tan 15° = 2 - \sqrt{3}$, så $EP = \sqrt{3}$. I ΔEBP er så

$$BP^2 = BE^2 + PE^2 = 1^2 + \sqrt{3}^2 = 4 \quad \text{så} \quad BP = 2 .$$

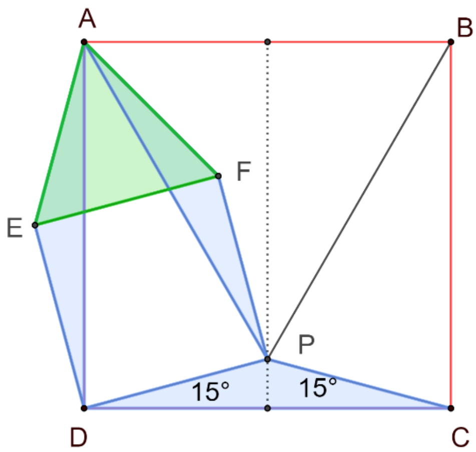
Så er ΔBPC ligebenet, så

$$\angle PCB = \angle CPB = 75° \quad , \quad \angle CBP = 30° \quad , \quad \angle EBP = 60° .$$

Vi har så, at

$$BP = BA = 2 \quad , \quad \angle ABP = 60° \quad ,$$

og dette giver, at ΔABP er ligesidet.



Bevis 5. Punkterne E og F afsættes, så $\square PDEF$ er et kvadrat, hvor E og F ligger på samme side af PD som A og B.

Så er ΔPDC og ΔEDA kongruente, da de har to sider og den mellemliggende vinkel parvis lige store:

$$PD = ED \quad , \quad DC = DA \quad ,$$
$$\angle PDC = \angle ADE = 15° .$$

Vi får, at

$$\angle DEA = 180° - 2 \cdot 15° = 150° ,$$

så

$$\angle FEA = \angle DEA - \angle DEF = 150° - 90° = 60° .$$

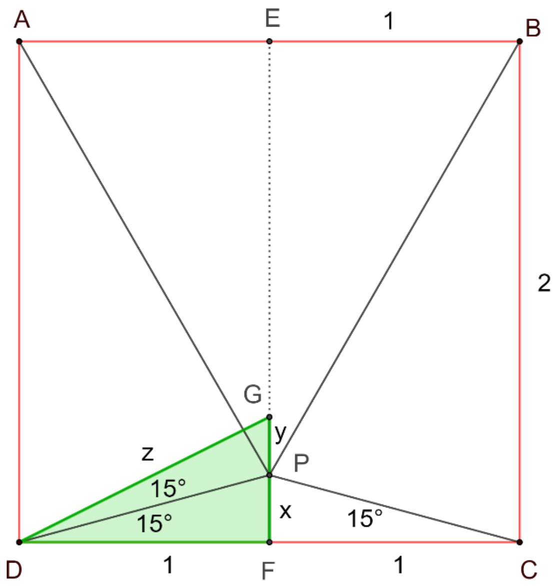
I ΔAEF findes nu to lige lange sider: $EF = EA$ og den mellemliggende vinkel er 60°, så trekanten er ligesidet. Dette giver, at

$$\angle PFA = \angle PFE + \angle EFA = 90° + 60° = 150°.$$

Dette medfører, at ΔAFP og ΔAED er kongruente, da de har to sider og den mellemliggende vinkel parvis lige store:

$$PF = ED \quad , \quad AF = AE \quad , \quad \angle PFA = \angle DEA = 150°.$$

Så er $AP = AD$. På grund af symmetrien om kvadratets midterlinje gennem P er også $BP = AP$. Altså er ΔABP ligesidet.



Bevis 6. Lad E og F være midtpunkter af AB og CD. Vi afsætter punktet G på EF, så $\angle FDG = 30°$, dvs. $\angle PDG = 15°$. For nemheds skyld sætter vi

$$x = PF \quad , \quad y = PG \quad , \quad z = DG \ .$$

Da ΔDGF er en 30°-60°-90°-trekant, er

$$x + y = \tfrac{1}{2} z \ .$$

Af ΔDGF fås, at

$$FG^2 + FD^2 = DG^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\tfrac{1}{2} z\right)^2 + 1 = z^2 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{2}{\sqrt{3}} \ .$$

Da DP er vinkelhalveringslinje i ΔDGF, er

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{z} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2x = \sqrt{3} y \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{2}{\sqrt{3}} x \ , \ ,$$

hvoraf

$$x + y = \tfrac{1}{2} z \quad \Leftrightarrow \quad x + \frac{2}{\sqrt{3}} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 - \sqrt{3} \ .$$

Altså er

$$EP = EF - FP = 2 - x = \sqrt{3} \ .$$

Pythagoras i ΔAPE giver så, at $AP = 2$. Altså er $AP = AB$ og på grund af symmetrien omkring EF er $BP = 2$, så ΔABP er ligesidet.

Bevis 7. Lad DP skære BC i G. Projektionen af C på DG er H. Vi sætter $CG = x$, $CH = h$ og $AP = y$. Så er $PF = \tfrac{1}{2} x$.

Den retvinklede ΔDGC har en vinkel på 15°, så efter bemærkningen til løsning e gælder, at $DG = 4h$. Arealet af ΔDGC er så

$$\tfrac{1}{2} \cdot DC \cdot CG = \tfrac{1}{2} \cdot h \cdot DG \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot x = h \cdot 4h \quad \Leftrightarrow \quad x = 2h^2 .$$

Da $DG > 2$, er $4h > 2$, så $h > \frac{1}{2}$, så vi i ΔDGC får, at

$$2^2 + x^2 = DG^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 4 + x^2 = 16h^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2\sqrt{4h^2 - 1}\,.$$

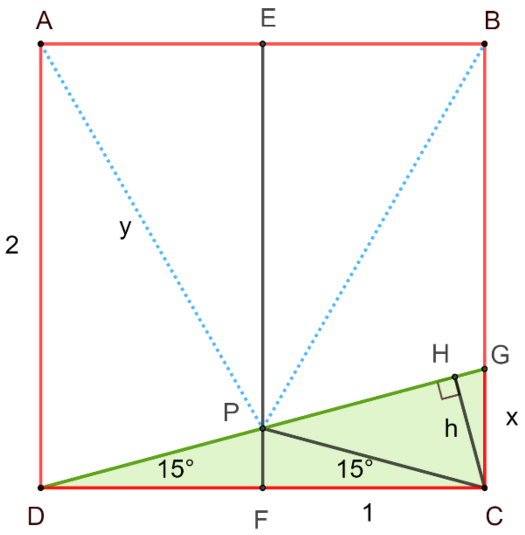
Dermed er

$$h^2 = \sqrt{4h^2 - 1} \quad \Leftrightarrow \quad h^4 - 4h^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad h^2 = 2 \pm \sqrt{3}\,.$$

Tydeligvis er $h < 1$, så $h^2 = 2 - \sqrt{3}$ og dermed

$$PF = \tfrac{1}{2}x = h^2 = 2 - \sqrt{3}\,.$$



Så er

$$PE = EF - PF = \sqrt{3}\,,$$

og i ΔAPE får vi så endelig, at

$$y^2 = PE^2 + AE^2 = 3 + 1 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad y = AP = 2\,.$$

På grund af symmetri er også $BP = 2$, så ΔPBA er ligesidet.

Hvis man ikke ønsker at bruge resultatet om en retvinklet trekant med en vinkel på 15° fra løsning e, kan man bemærke, at vi i ΔDCG har, at

$$CG = DG \cdot \sin 15° \quad , \quad CD = DG \cdot \cos 15°\,,$$

så at

$$[\Delta DCG] = \tfrac{1}{2} CD \cdot CG = \tfrac{1}{2} DG^2 \cdot \sin 15° \cdot \cos 15° = \tfrac{1}{4} DG^2 \cdot \sin 30° = \tfrac{1}{8} DG^2\,.$$

På den anden side er $[\Delta DCG] = \frac{1}{2} DG \cdot h$, så

$$\tfrac{1}{2} DG \cdot h = \tfrac{1}{8} DG^2 \quad \Leftrightarrow \quad DG = 4h\,.$$

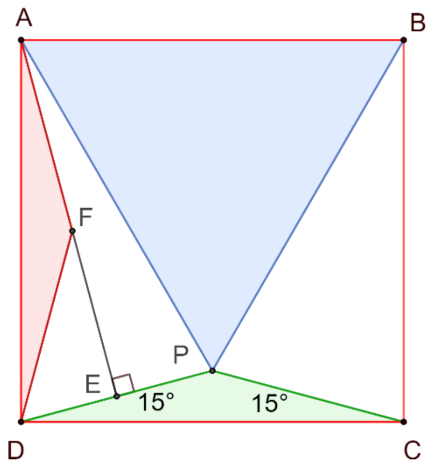
Bevis 8. I ΔADP er E projektionen af A på DP. Punktet F afsættes på AE, så $\angle EDF = 60°$. Så er $\angle EFD = 30°$ og dermed $\angle AFD = 150°$. Desuden er $\angle DPC = 150°$. Da $\angle FDA = 15°$, er

$$\angle FAD = 180° - 150° - 15°\,.$$

Dette giver, at ΔFDA og ΔPDC er kongruente og $DP = DF$. Nu er ΔFDE en 30°-60°-90°-trekant, så

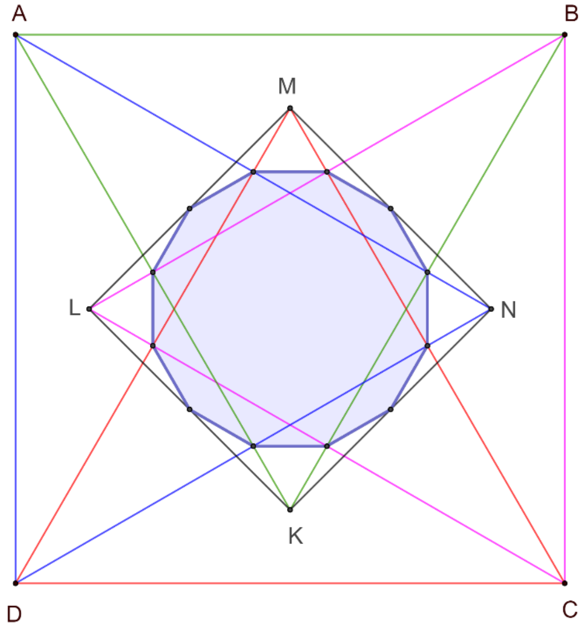
$$DE = \tfrac{1}{2} DF = \tfrac{1}{2} DP.$$

Dermed er E midtpunktet af DP, og AE er midtnormal af DP. Derfor er $AD = AP$. På samme måde er $BC = BP$. Altså er ΔABP ligesidet.



Bemærkning. Følgende smukke egenskab ved kvadratet er måske ikke så kendt:

I kvadratet *ABCD* tegnes ligesidede trekanter *ABK*, *BCL*, *CDM* og *DAN* indad i kvadratet. Da vil midtpunkterne af de fire linjestykker *KL*, *LM*, *MN*, *NK* sammen med midtpunkterne af de otte linjestykker *AK*, *BK*, *BL*, *CL*, *CM*, *DM*, *DN* og *DA* udspænde en regulær tolvkant.



Besvarelser modtaget fra: Jens-Søren Andersen, Johs. Christensen, Walther Janous, Hans Mortensen, Palle Bak Petersen, Jan Erik Pedersen.

Løsningerne på opgave 400 markerer afslutningen af *Opgavehjørnets* 40-årige levetid. Tak til de mange læsere og løsere, der i tidens løb har bidraget med smukke, overraskende og finurlige matematiske betragtninger inden for de grene af matematikken, som *Opgavehjørnet* har dækket.

Senere på sommeren/efteråret vil en fuldstændig revideret og renskrevet udgave af samtlige 400 opgaver med løsninger blive tilgængelig i Matematiklærerforeningens materialebank; heri vil desuden samtlige opgaver med løsninger, der ikke har fundet plads i *Opgavehjørnet,* være medtaget.

Jens Carstensen, Frederiksberg
15.6.2023