Svar på opgave 399
(April 2023)

Opgaverne:

a. Skriv tallet $k = \dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}}$ som en sum af tal af formen 2^q, hvor q er rational.

b. Bestem alle irrationale tal x, så både $x^3 - 6x$ og $x^4 - 8x^2$ er rationale.

c. Vis, at $\sqrt[3]{2}$ ikke kan skrives på formen $\sqrt[3]{2} = p + q\sqrt{r}$, hvor p, q og r er rationale tal.

d. Bestem det reelle tal a, når $a + \sqrt{3}$ og $a^2 + 5\sqrt{3}$ begge er rationale.

Besvarelser:

a.

1. metode.

Vi har, at

$$\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}\right) = 2-\sqrt[3]{4} \ ,$$

så

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}}{2-\sqrt[3]{4}} \ .$$

Nu bruger vi den algebraiske identitet

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 \ .$$

Hvis vi sætter $a = 2$ og $b = \sqrt[3]{4}$, er

$$\left(2-\sqrt[3]{4}\right)\left(4+2\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}\right) = 2^3 - \sqrt[3]{4}^3 = 4 \ .$$

Dermed er

$$k = \frac{\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}}{2-\sqrt[3]{4}} = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}\right)\left(4+2\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}\right)}{\left(2-\sqrt[3]{4}\right)\left(4+2\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}\right)} = \frac{4\sqrt{2}+4\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{2}+4+2\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{2}+2\sqrt[3]{4}}{4}$$

$$= \sqrt{2}+\sqrt[3]{2}+\frac{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{2}}{2}+1+\frac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt[3]{4}}{2} = 2^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{-1}+2^0+2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{-1}+2^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{-1}$$

$$= 2^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{6}}+2^0+2^{-\frac{1}{6}}+2^{-\frac{1}{3}} \ .$$

2. metode.
Vi benytter, at

$$(a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5) = a^6 - b^6 .$$

Vi sætter $a = \sqrt{2}$ og $b = \sqrt[3]{2}$ og forlænger brøken k med tallet

$$a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5$$

$$= \sqrt{2}^5 + \sqrt{2}^4 \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt{2}^3 \cdot \sqrt[3]{2}^2 + \sqrt{2}^2 \cdot \sqrt[3]{2}^3 + \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}^4 + \sqrt[3]{2}^5$$

$$= 4\sqrt{2} + 4\sqrt[3]{2} + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4} + 2 \cdot 2 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4} \; .$$

Vi benytter desuden at

$$a^6 - b^6 = \sqrt{2}^6 - \sqrt[3]{2}^6 = 8 - 4 = 4 ,$$

og får

$$k = \frac{4\sqrt{2} + 4\sqrt[3]{2} + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4} + 4 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4}}{4}$$

$$= 2^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{6}} + 2^0 + 2^{-\frac{1}{6}} + 2^{-\frac{1}{3}} \; .$$

3. metode (Asger Olesen, Tønder).
For $a \neq 1$ og $a \neq 0$ er

$$\frac{a^6 - 1}{a - 1} = a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$$

og dermed

$$\frac{a^6 - 1}{a^3 - a^2} = a^3 + a^2 + a + 1 + a^{-1} + a^{-2} .$$

For $a = \sqrt[6]{2} = 2^{\frac{1}{6}}$ fås

$$\frac{\sqrt[6]{2} - 1}{\sqrt[6]{2}^3 - \sqrt[6]{2}^2} = \sqrt[6]{2}^3 + \sqrt[6]{2}^2 + \sqrt[6]{2} + 1 + \sqrt[6]{2}^{-1} + \sqrt[6]{2}^{-2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}} = 2^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{6}} + 2^0 + 2^{-\frac{1}{6}} + 2^{-\frac{1}{3}} .$$

b.
1. metode.
Antag, at x er et tal med den ønskede egenskab. Vi sætter

$$a = x^2 - 4 ,$$

så

$$a^2 = x^4 - 8x^2 + 16$$

er rational. Vi sætter

$$b = x^3 - 6x = x(x^2 - 6) = x(a - 2) \; ,$$

som også efter forudsætningen er rational. Vi får, at

$$b^2 = x^2(a - 2)^2 = (a + 4)(a - 2)^2 = a^3 - 12a + 16 = a(a^2 - 12) + 16 .$$

Da b^2 er rational (fordi b er det), er $a(a^2 - 12)$ rational.
Hvis $a^2 - 12 \neq 0$, er $a^2 - 12$ rational (fordi a^2 er det). Dette giver, at a er rational. Hvis $a^2 - 12 = 0$, er $a = \pm 2\sqrt{3}$. Så er

$$x^2 = a + 4 = 4 \pm 2\sqrt{3} = \left(1 \pm \sqrt{3}\right)^2 ,$$

hvoraf $x = \pm\left(1 \pm \sqrt{3}\right)$.
Hvis $a^2 - 12 \neq 0$ er som nævnt a rational, så $b = x(a - 2)$ er rational. Da x er irrational (og $x \neq 0$), må så $a = 2$. Så er

$$x^2 = a + 4 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{6} .$$

Ved indsættelse fås, at alle seks værdier for x gør $x^3 - 6x$ og $x^4 - 8x^2$ rationale.

2. metode (Jens-Søren Andersen, Esbjerg).
Lad q_1 og q_2 være givne rationale tal og u en fælles irrational rod for de to polynomier $x^3 - 6x - q_1$ og $x^4 - 8x^2 - q_2$. En ækvivalent formulering af den stillede opgave er: Find de mulige værdier for u.
At u er fælles rod for de to polynomier er ifølge Euklids algoritme for bestemmelse af største fælles divisor ensbetydende med, at u er rod i største fælles divisor for polynomierne. De næste to linjer følger Euklids algoritme:

$$x^4 - 8x^2 - q_2 = x(x^3 - 6x - q_1) + (-2x^2 + q_1x - q_2)$$

$$x^3 - 6x - q_1 = \left(-\tfrac{1}{2}x - \tfrac{q_1}{4}\right)(-2x^2 + q_1x - q_2) + \left(\left(\tfrac{q_1^2}{4} - \tfrac{q_2}{2} - 6\right)x - q_1\left(1 + \tfrac{q_2}{4}\right)\right).$$

Da $-2x^2 + q_1x - q_2$ ikke er nulpolynomiet, har største fælles divisor højst grad 2. Om- vendt gælder, at da største fælles divisor har det irrationale tal u som rod, har største fælles divisor mindst grad 2. Derfor er

$$\left(\tfrac{q_1^2}{4} - \tfrac{q_2}{2} - 6\right)x - q_1\left(1 + \tfrac{q_2}{4}\right)$$

nulpolynomiet. Altså gælder

$$\tfrac{q_1^2}{4} - \tfrac{q_2}{2} - 6 = 0 \quad \text{og} \quad q_1\left(1 + \tfrac{q_2}{4}\right) = 0 .$$

Heraf fås

$$(q_1,q_2) \ : \ (0,-12) \ , \ (\pm 4,-4).$$

Desuden er $x^2 - \tfrac{q_1}{2}x + \tfrac{q_2}{2}$ den største fælles divisor med højestegradskoefficient 1 for de to polynomier. Vi får, at

$(q_1,q_2) = (0,-12)$ giver største fælles divisor $x^2 - \tfrac{q_1}{2}x + \tfrac{q_2}{2} = x^2 - 6$ med rødder $\pm\sqrt{6}$

$(q_1,q_2) = (\pm 4,-4)$ giver største fælles divisor $x^2 - \tfrac{q_1}{2}x + \tfrac{q_2}{2} = x^2 \mp 2x - 2$ med rødder $\pm\left(1 \pm \sqrt{3}\right)$.

Svaret på opgaven er altså følgende seks tal:

$$-\sqrt{6} \ , \ \sqrt{6} \ , \ -1-\sqrt{3} \ , \ 1-\sqrt{3} \ , \ -1+\sqrt{3} \ , \ 1+\sqrt{3} \ .$$

c.
1. metode.
Antag, at der findes rationale tal p, q og r, så

$$\sqrt[3]{2} = p + q\sqrt{r}\ .$$

Så er

$$2 = \left(p + q\sqrt{r}\right)^3 = p^3 + 3p^2q\sqrt{r} + 3pq^2r + q^3r\sqrt{r}\ ,$$

hvoraf

$$2 = p(p^2 + 3q^2r) + q(3p^2 + q^2r)\sqrt{r}\ . \qquad (1)$$

Hvis $q = 0$, er $\sqrt[3]{2} = p$ rational, hvilket er umuligt. Altså er $q \neq 0$.
Vi deler op i tilfælde.

I. $3p^2 + q^2r \neq 0$.

Af (1) fås

$$\sqrt{r} = \frac{2 - p(p^2 + 3q^2r)}{q(3p^2 + q^2r)}\ ,$$

så

$$\sqrt[3]{2} = p + q \cdot \frac{2 - p(p^2 + 3q^2r)}{q(3p^2 + q^2r)}\ ,$$

hvilket medfører, at $\sqrt[3]{2}$ er rational, hvilket er umuligt.

II. $3p^2 + q^2r = 0$.

Så er

$$3p^2 + q^2r = 0 \quad \Leftrightarrow \quad q^2r = -3p^2\ ,$$

og af (1) fås

$$2 = p(p^2 + 3q^2r) \quad \Leftrightarrow \quad 2 = p(p^2 + 3 \cdot (-3p^2)) \quad \Leftrightarrow \quad 2 = -8p^3 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{2} = -2p\ ,$$

som igen er i strid med, at $\sqrt[3]{2}$ er irrational.
I begge tilfælde er en fremstilling af den ønskede type umulig.

2.metode (Jens-Søren Andersen, Esbjerg).
Hvis der findes rationale tal p, q og r, så

$$\sqrt[3]{2} = p + q\sqrt{r}\ ,$$

ville $\sqrt[3]{2}$ være konstruerbart med passer og lineal, så det *deliske problem* (terningens fordobling) ville være løsbart. Dette er ikke tilfældet, så det ønskede resultat fremgår.

Bemærkning. Vi viser for en ordens skyld, at $\sqrt[3]{2}$ er irrational.
Hvis $\sqrt[3]{2}$ kunne skrives som en uforkortelig brøk $\frac{m}{n}$, er $\frac{m^3}{n^3} = 2$ eller $m^3 = 2n^3$. Så er m^3 lige (og dermed er m lige), så m^3 er delelig med 8.

Vi får, at $n^3 = \frac{1}{2}m^3$, hvor $\frac{1}{2}m^3$ er lige. Heraf følger, at n^3 er lige, så n er lige. At både m og n er lige er i strid med, at $\frac{m}{n}$ er uforkortelig.

d.
1. metode.
Vi kan skrive følgende slutningskæde:

$$a+\sqrt{3} \in Q \;\Rightarrow\; \left(a+\sqrt{3}\right)^2 \in Q \;\Leftrightarrow\; a^2+2a\sqrt{3}+3 \in Q \;\Rightarrow\; a^2+2a\sqrt{3} \in Q \;.$$

Da $a^2 + 5\sqrt{3} \in Q$ får vi

$$a^2+5\sqrt{3}-\left(a^2+2a\sqrt{3}\right) \in Q \;\Leftrightarrow\; -(2a-5)\sqrt{3} \in Q \;.$$

Derfor findes et rationalt tal q, så

$$2a-5=q\sqrt{3} \;\Leftrightarrow\; a=\frac{q\sqrt{3}+5}{2} \;.$$

Videre slutter vi sådan:

$$a+\sqrt{3} \in Q \;\Leftrightarrow\; \frac{q\sqrt{3}+5}{2}+\sqrt{3} \in Q$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{5}{2}+\left(\frac{q}{2}+1\right)\sqrt{3} \in Q \;\Rightarrow\; \left(\frac{q}{2}+1\right)\sqrt{3} \in Q \;.$$

Dette er kun muligt, hvis $\frac{q}{2}+1=0$, dvs. hvis q = -2. Så er

$$a=\frac{q\sqrt{3}+5}{2}=\frac{5-2\sqrt{3}}{2}=\frac{5}{2}-\sqrt{3} \;.$$

Vi får, at

$$a+\sqrt{3}=\tfrac{5}{2}-\sqrt{3}+\sqrt{3}=\tfrac{5}{2} \in Q \;,$$

$$a^2+5\sqrt{3}=\tfrac{1}{4}\left(5-2\sqrt{3}\right)^2+5\sqrt{3}=\tfrac{1}{4}\left(25+12-20\sqrt{3}\right)+5\sqrt{3}=\tfrac{37}{4} \in Q \;.$$

2. metode (Jens-Søren Andersen, Esbjerg)
Vi sætter $r=a+\sqrt{3}$.
Så er

$$a^2+5\sqrt{3}=\left(r-\sqrt{3}\right)^2+5\sqrt{3}=(r^2+3)+(5-2r)\sqrt{3} \;.$$

Kravet om, at både $r=a+\sqrt{3}$ og $a^2 + 5\sqrt{3}$ er rationale, er derfor ensbetydende med, at 5 - 2r = 0.
Altså er $r = \frac{5}{2}$ og $a=\frac{5}{2}-\sqrt{3}$.

Besvarelser modtaget fra:
- Jens-Søren Andersen
- Roger Bengtsson
- Walther Janous
- Asger Olesen
- Hans Mortensen
- Jan Erik Pedersen.