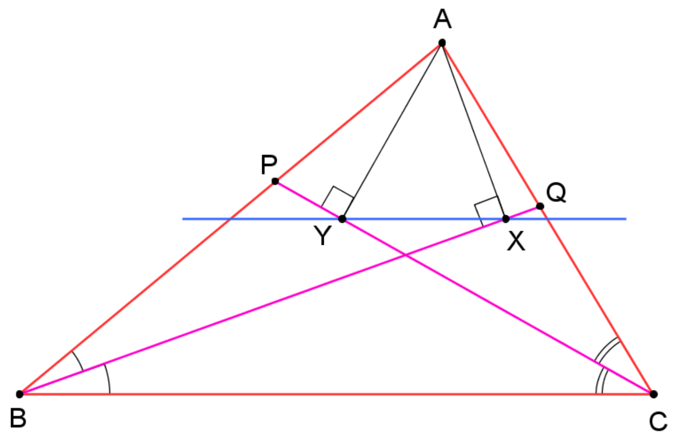
Svar på opgave 397 (Februar 2023)

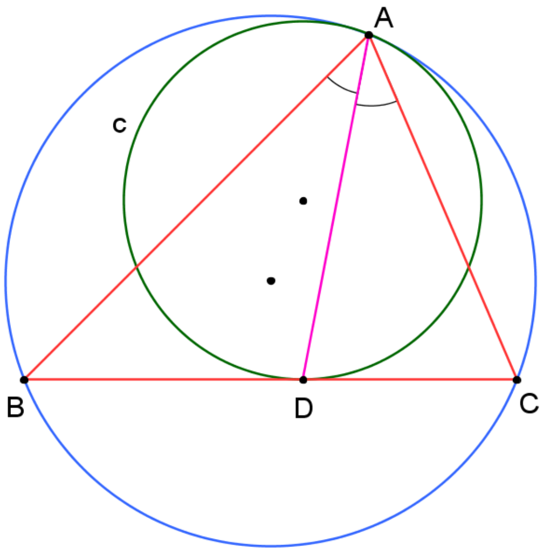
Opgaverne:

Nogle smukke og ikke så kendte egenskaber ved trekantens vinkelhalveringslinjer. Opgavesættet består af 4 dele (a, b, c, d).

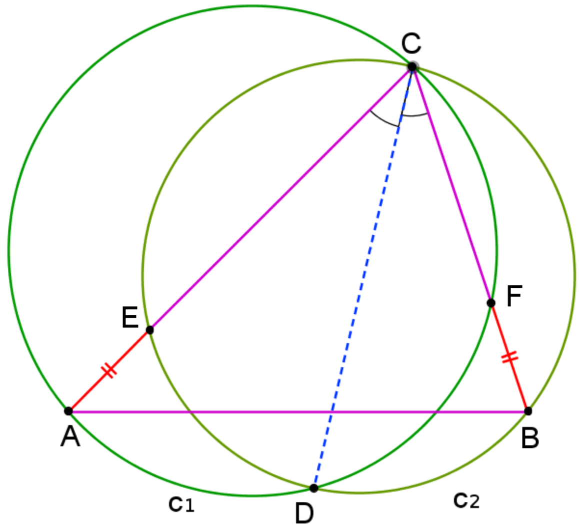
a. I ΔABC er X og Y projektionerne af A på vinkelhalveringslinjerne BQ og CP fra vinklerne B og C.
Vis, at $XY \parallel BC$.



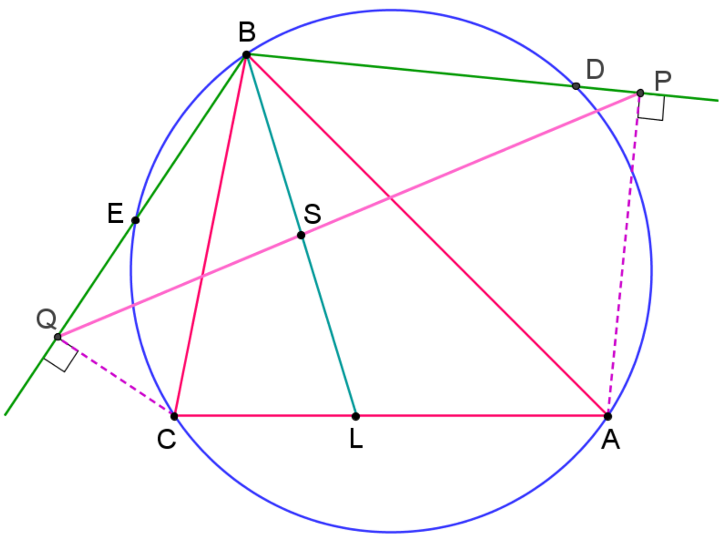
b. I ΔABC er AD vinkelhalveringslinje fra A. Cirklen c tangerer BC i D og går gennem A.
Vis, at den omskrevne cirkel for ΔABC tangerer c i A.



c. I ΔABC ligger E og F på AC og BC, så $AE = BF$. Cirklen c_1 går gennem A, C og F, og cirklen c_2 går gennem B, C og E. Cirklerne skærer hinanden i C og D. Vis, at CD er vinkelhalveringslinje for C.



d. I ΔABC er BL vinkelhalveringslinje fra B og desuden er D og E midtpunkter af buerne $\overset{\frown}{AB}$ og $\overset{\frown}{BC}$ i den omskrevne cirkel. Projektionerne af A og C på BD og BE er P og Q. Vis, at PQ halverer BL.



Besvarelser:

a.

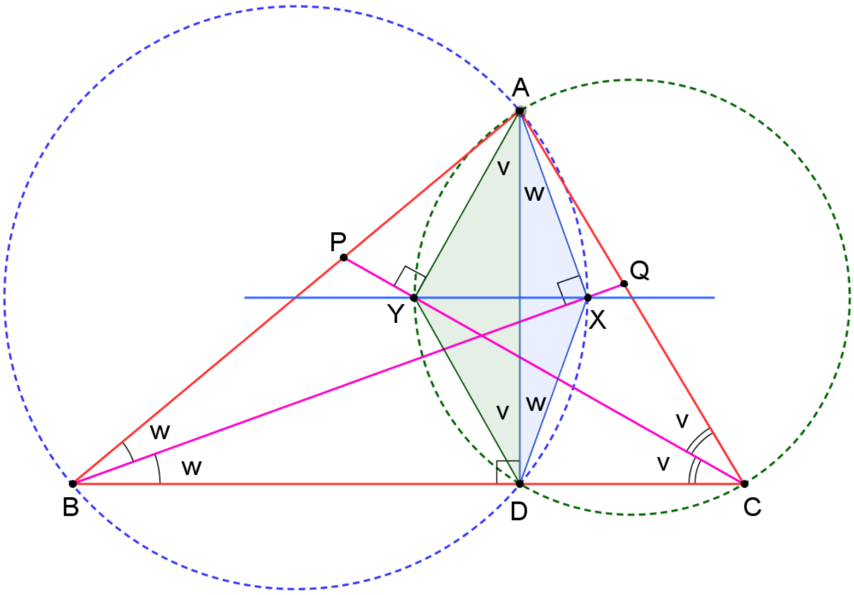
1. metode.
Lad AD være højden fra A på BC. Vi ser, at $\square AYDC$ er indskrivelig på grund af de rette vinkler AYC og ADC. Lige store periferivinkler i den omskrevne cirkel giver, at

$$\angle ADY = \angle ACY = \tfrac{1}{2}C = \angle YCD = \angle YAD.$$

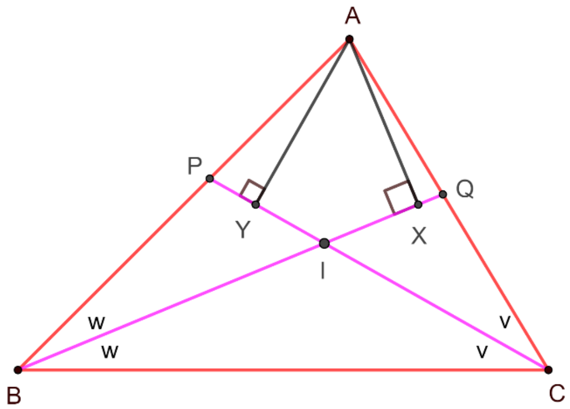
Altså er ΔADY ligebenet og $AY = YD$.
På samme måde er $\square AXDB$ indskrivelig, så vi får

$$\angle ADX = \angle ABX = \tfrac{1}{2}B = \angle XBD = \angle XAD.$$

Så er ΔADX ligebenet og $AX = XD$.



Nu er $\square AYDX$ sammensat af to ligebenede trekanter ADY og ADX med fælles grund- linje AD. Dermed er XY højde i begge trekanter, som er vinkelret på grundlinjen, så $AD \perp XY$ eller $BC \parallel XY$. Vi har som gevinst desuden fået, at XY halverer højden AD.



2. metode.
Lad I være vinkelhalveringslinjernes skæringspunkt. Vi sætter

$$A = 2u \quad , \quad B = 2w \quad , \quad C = 2v \quad .$$

Så er

$$u + v + w = 90^\circ \; .$$

I ΔACP får vi

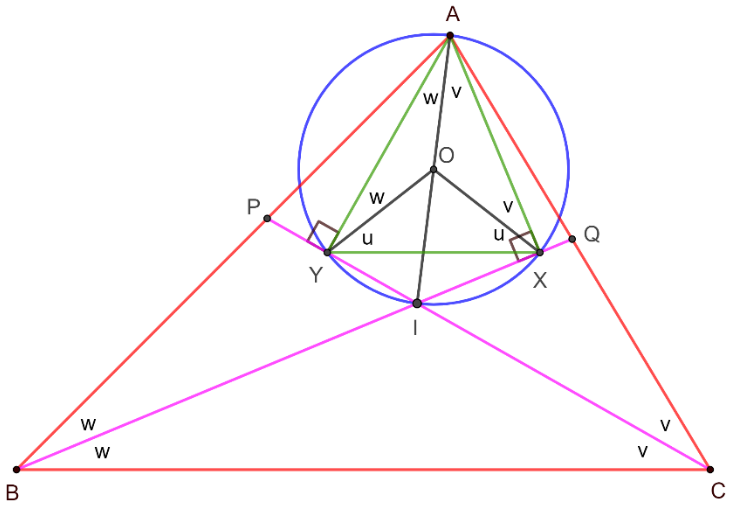
$$A + \angle CPA + \angle ACP = 180^\circ \quad \Leftrightarrow \quad 2u + \angle CPA + v = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \quad \angle CPA = 180^\circ - 2u - v = 2u + 2v + 2w - 2u - v = 2w + v .$$

I ΔAYP er

$$\angle PAY + \angle AYP + \angle YPA = 180^\circ \quad \Leftrightarrow \quad \angle PAY + 90^\circ + \angle CPA = 180^\circ$$

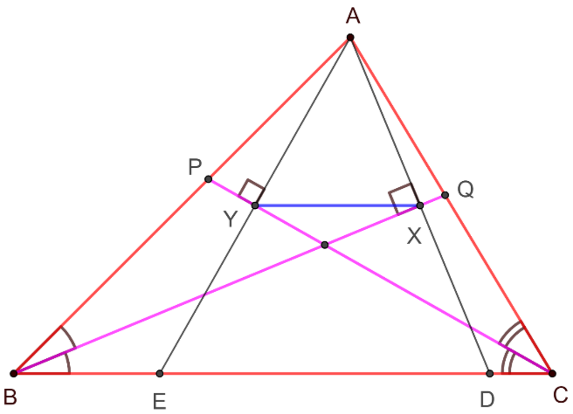
$$\Leftrightarrow \quad \angle PAY = 90° - \angle CPA = u + v + w - (2w + v) = u - w \, .$$



Dermed er
$$\angle IAY = \angle IAP - \angle PAY = u - (u - w) = w \, ,$$
så at
$$\angle AIY = 90° - \angle IAY = 90° - w = u + v \, .$$
Samme argument i højde del af figuren giver tilsvarende
$$\angle IAX = v \quad \text{og} \quad \angle AIX = u + w \, .$$
Idet
$$\angle AYI = 90° = \angle AXI \, ,$$
er $\square AXIY$ indskrivelig, og den omskrevne cirkels centrum O er midtpunkt af den fælles hypotenuse AI for ΔAYI og ΔAXI. Vi får så, at
$$\angle XOY = 2 \cdot \angle XAY = 2w + 2v \, .$$
Nu er ΔXOY ligebenet, så
$$\angle OXY = \angle OYX = \tfrac{1}{2}\left(180° - \angle XOY\right) = \tfrac{1}{2}\left(2u + 2v + 2w - (2w + 2v)\right) = u \, .$$
Da ΔOYA og ΔOXA er ligebenede, er
$$\angle OYA = \angle OAY = \angle IAY = w \quad \text{og} \quad \angle OXA = \angle OAX = \angle IAX = v \, ,$$
så vi til slut får
$$\angle XYC = \angle XYI = 90° - \angle OYA - \angle OYX = u + v + w - w - u = v \, .$$
Dermed er $\angle XYC = \angle YCB$, så $XY \parallel BC$.

3. metode (Roger Bengtsson, Lund).
Linjerne AX og AY forlænges til skæring med BC i D og E. Så er ΔABX og ΔDBX kongruente, da de har to vinkler parvis lige store samt den fælles side AX. Dette giver, at X er midtpunkt af AD.

På samme måde er ΔACY og ΔECY kongruente, og Y er midtpunkt af AE. Dermed er XY midtpunktstransversal i ΔAED, så $BC \parallel XY$



b.

1. metode.
Lad centrum for c være P og centrum for den omskrevne cirkel være O. Vi har, at

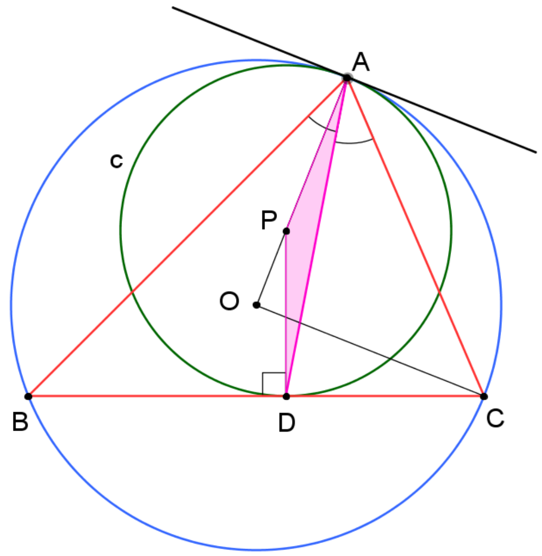
$$\angle ADB = 180° - B - \tfrac{1}{2}A$$

og

$$\angle ADC = 180° - C - \tfrac{1}{2}A\,.$$

Vi kan antage, at $C > B$. Så er $\angle ADB > \angle ADC$.
Nu er $PA = PD$, så ΔPAD er ligebenet. Så får vi

$$\angle DAP = \angle ADP = \angle ADB - \angle PDB$$
$$= \angle ADB - 90° = 90° - B - \tfrac{1}{2}A\,.$$



Dette giver, at

$$\angle CAP = \angle CAD + \angle DAP = \tfrac{1}{2}A + 90° - B - \tfrac{1}{2}A = 90° - B\,. \tag{1}$$

Vi får desuden, at

$$\angle AOC = 2 \cdot \angle ABC = 2B\,,$$

så vi i den ligebenede ΔAOC får, at

$$\angle CAO = \tfrac{1}{2}(180° - \angle AOC) = \tfrac{1}{2}(180° - 2B) = 90° - B\,. \tag{2}$$

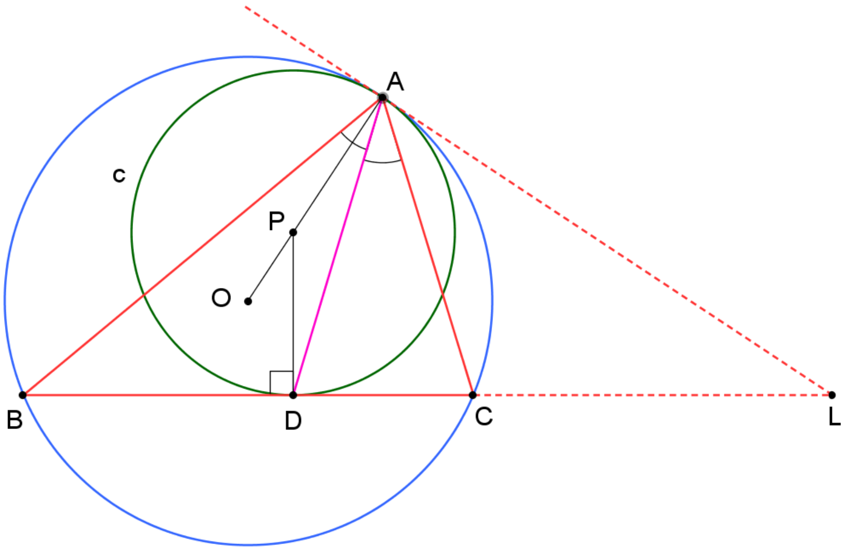
Af (1) og (2) fås

$$\angle CAP = \angle CAO\,,$$

så linjerne AP og AO falder sammen. Dette medfører, at tangenterne i A til c og til den omskrevne cirkel en vinkelrette på samme linje, så tangenterne til de to cirkler falder sammen. Dermed tangerer cirklerne hinanden i A.

2. metode.
Vi kan antage, at $AC < AB$. Lad tangenten til c i A skære BC i L. Da både LA og LD er tangenter til c, er $LA = LD$ og $\angle LAD = \angle LDA$. Så får vi i ΔBAD:

$$B = 180° - \angle BDA - \angle BAD = \angle LDA - \angle BAD = \angle LAD - \angle CAD = \angle LAC\,.$$



Efter korde-tangentsætningen betyder dette, at LA er tangent også til den omskrevne cirkel i ΔABC.

3. metode (Magnus Jakobsson, Lund).
Lad c skære siderne AB og AC i L og M. Vi be- nytter betegnelser for længder:

$$a = CD \;\;,\;\; b = AM \;\;,\;\; c = MC \;\;,\;\; d = AL \;\;,\;\; e = BD \;\;,\;\; f = BL \;\; .$$

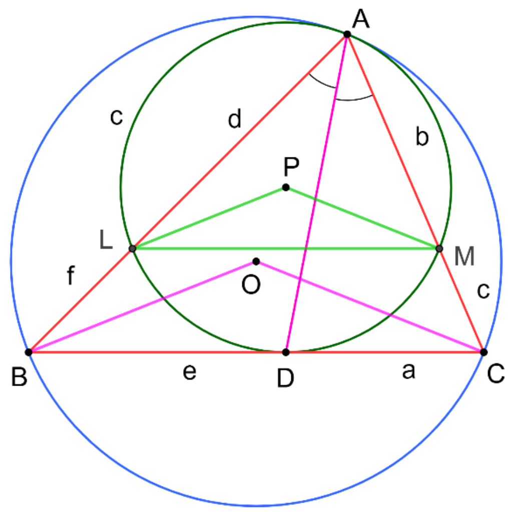
Korde-tangentsætningen (punkts potens) for cirklen c giver

$$a^2 = c(b+c) \quad , \quad e^2 = f(f+d) \;\; . \qquad (1)$$

Sætningen om vinkelhalveringslinjers delingsforhold af den modsatte side i trekanten giver

$$\frac{f+d}{b+c} = \frac{e}{a}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(f+d)^2}{e^2} = \frac{(b+c)^2}{a^2} \; . \qquad (2)$$



Her indsættes (1):

$$\frac{(f+d)^2}{f(f+d)} = \frac{(b+c)^2}{c(b+c)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{f+d}{f} = \frac{b+c}{c}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{f} = \frac{b}{c} \; .$$

Dette medfører, at ΔALM og ΔABC er ensvinklede, og at $LM \parallel BC$.
Desuden er $\angle LPM = \angle BOC$, fordi de er centervinkler, der spænder over buer med samme gradtal i de to cirkler. Da ΔPLM og ΔOBC er ligebenede, er $\angle PLA = \angle OBA$. Så er også $\angle LAP = \angle BAO$, og derfor tangerer c den omskrevne cirkel for ΔABC.

c.

1. metode.
Da □$ACFD$ er indskrivelig, er

$$\angle DAE = \angle DAC = 180° - \angle DFC = \angle DFB\ .$$

Da □$BDEC$ er indskrivelig, er

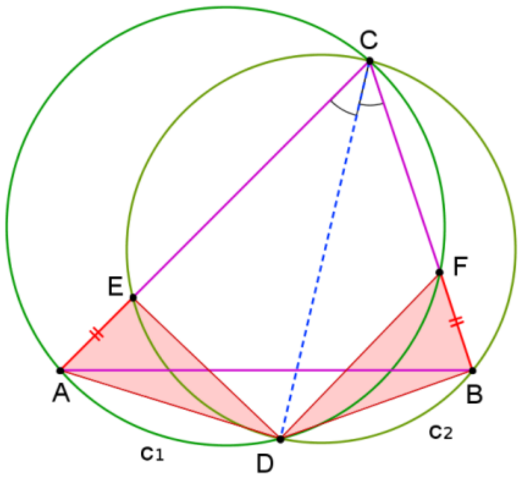
$$\angle FBD = \angle CBD = 180° - \angle CED = \angle AED.$$

I ΔAED og ΔFBD har vi altså

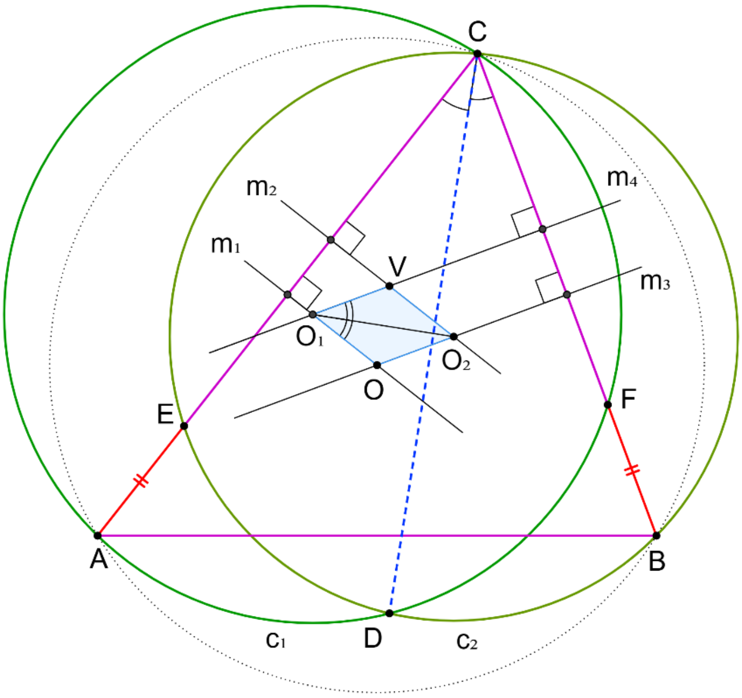
$$\angle FBD = \angle AED \quad , \quad \angle DFB = \angle DAE \quad , \quad FB = AE\ ,$$

så de to trekanter har to vinkler og den mellemliggende side parvis lige store og er dermed kongruente. Dermed er $ED = BD$, og disse to korder spænder over to lige lange buer i c_2. Lige store periferi- vinkler giver, at

$$\angle BCD = \angle ACD.$$



2. metode. Lad m_1, m_2, m_3 og m_4 være midtnormaler for AC, CE, CB og CF. Så vil m_1 og m_3 skære hinanden i O, centrum for den omskrevne cirkel for ΔABC. Desuden skærer m_1 og m_4 hinanden i centrum O_1 for c_1, og m_2 og m_3 skærer hinanden i centrum O_2 for c_2.

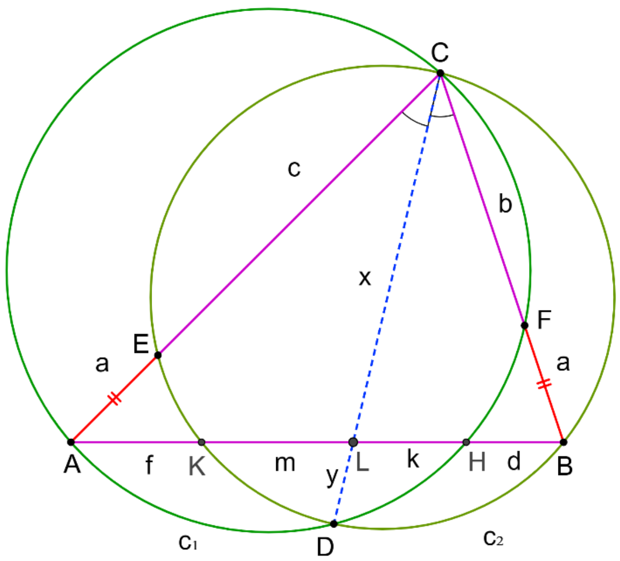


Vi betegner skæringspunktet mellem m_2 og m_4 med V. Nu er afstanden mellem m_1 og m_2 $\frac{1}{2}AE$ og afstanden mellem m_3 og m_4 er $\frac{1}{2}BF$. Disse to afstande er lige store, så $\square O_1VO_2O$ er en rombe. Linjen O_1O_2 er diagonal i romben, så den halverer $\angle VO_1O$. Da vinkelbenene CA og CB for $\angle ACB$ er vinkelrette på vinkelbenene VO_1 og OO_1 for $\angle VO_1O$, er $CD \perp O_1O_2$ og CD halverer $\angle ACB$.

3. metode (Magnus Jakobsson, Lund).
Lad cirklerne skære AB i K og H og lad CD skære AB i L. Vi indfører betegnelserne

$$a = BF = AE \quad , \quad b = CF \quad , \quad c = CE \quad , \quad d = BH \quad ,$$

$$k = HL \quad , \quad m = LK \quad , \quad f = AK \quad , \quad x = \mathrm{CL} \quad , \quad y = LD \, .$$



Efter kordesætningen gælder

$$xy = (d + k)m = (f + m)k \ .$$

Det sidste lighedstegn giver

$$d \cdot m = f \cdot k \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{f} = \frac{k}{m} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{f} = \frac{d+k}{f+m} \ . \tag{1}$$

I cirklen gennem A, F og C giver sekantsætningen (punkts potens) for punktet B, at

$$a(a + b) = d(d + k + m + f) \ ,$$

og i cirklen gennem B, E og C giver sekantsætningen for punktet A, at

$$a(a + c) = f(f + m + k + d) \ .$$

Division af de to sidste ligninger giver

$$\frac{a+b}{a+c} = \frac{d}{f} \ .$$

Sammen med (1) giver dette

$$\frac{a+b}{a+c} = \frac{d+k}{f+m} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{CB}{CA} = \frac{BL}{AL} \ .$$

Efter den omvendte sætning til sætningen om vinkelhalveringslinjens delingsforhold af den modstående side i trekanten, er så CD vinkelhalveringslinje for C.

d.

Lad M, N og S være midtpunkter af BC, BA og BL. Så ligger punkterne M, S og N på linje. Vi viser, at PQ går gennem S.

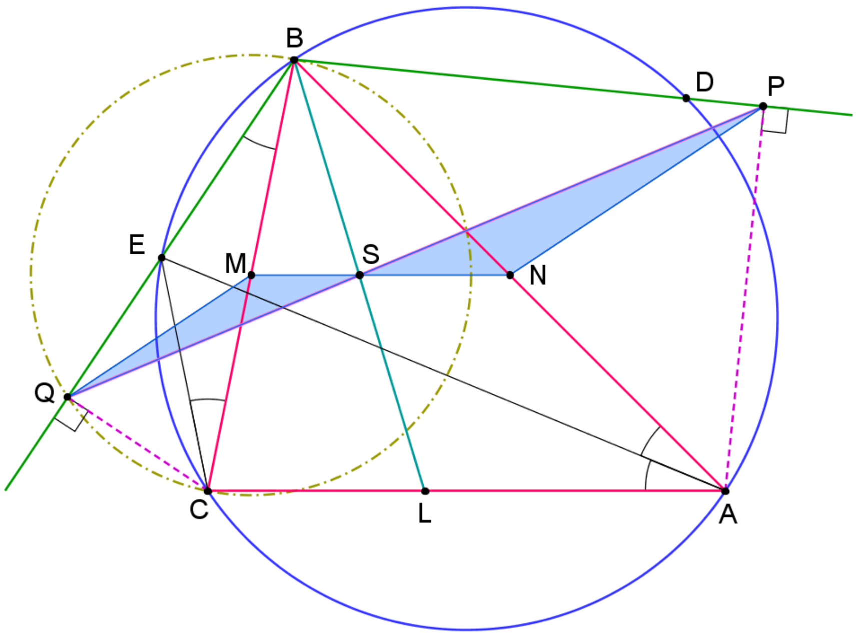
Vi trækker linjerne AE og CE. Lige store periferivinkler i trekantens omskrevne cirkel giver, at

$$\angle EBC = \angle ECB = \tfrac{1}{2} A \ ,$$

og desuden ses i den indskrivelige $\square BECA$, at $\angle BEC = 180° - A$.

I den retvinklede ΔCBQ er M midtpunkt af hypotenusen BC og dermed centrum for tre- kantens omskrevne cirkel. Da $\angle QBC = \angle EBC = \frac{1}{2}A$ er en periferivinkel, der spænder over samme bue som centervinklen QMC, er

$$\angle QMC = 2 \cdot \angle QBC = A.$$



Da MS er midtpunktstransversal i ΔBCL, er

$$\angle CMS = 180° - \angle BMS = 180° - C\ .$$

Dermed er

$$\angle QMS = \angle QMC + \angle CMS = A + 180° - C\ . \qquad (1)$$

På samme måde gælder i den retvinklede ΔABP, at

$$\angle PNA = 2 \cdot \angle PBA = 2 \cdot \angle DBA = 2 \cdot \tfrac{1}{2}C = C\ ,$$

så

$$\angle BNP = 180° - \angle PNA = 180° - C\ ,$$

hvoraf

$$\angle SNP = \angle SNB + \angle BNP = \angle CAB + 180° - C = A + 180° - C\ . \qquad (2)$$

Af (1) og (2) fås, at

$$\angle SNP = \angle QMS \quad .$$

Sætningen om vinkelhalveringslinjens delingsforhold af den modstående side i trekan- ten giver

$$\frac{QM}{MS} = \frac{BM}{MS} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}CL} = \frac{BC}{CL} = \frac{BA}{AL} = \frac{\frac{1}{2}BA}{\frac{1}{2}AL} = \frac{BN}{NS} = \frac{PN}{NS}\ .$$

Vi har brugt, at $QM = BM$ og $PN = BN$ i de retvinklede trekanter QBC og PBA. Da altså

$$\frac{QM}{MS} = \frac{PN}{NS} \quad \text{og} \quad \angle QMS = \angle SNP \ ,$$

er ΔQMS og ΔPNS ensvinklede. Dermed er $\angle MSQ = \angle NSP$, så M, S og N ligger på linje.

Besvarelser modtaget fra:

- Jens-Søren Andersen
- Roger Bengtsson
- Magnus Jakobsson
- Walther Janous
- Jan Erik Pedersen