Svar på opgave 395 (December 2022) version 2

Opgaverne:

a. Bestem samtlige hele tal n, for hvilke $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 3n + 31$ er et kvadrattal.

b. Vis, at der ikke findes positive hele tal n, for hvilke $n^4 - 7n^2 + 1$ er et kvadrattal.

c. Opløs polynomiet $x^{10} + x^5 + 1$ i faktorer med hele koefficienter.

Besvarelse:

a.

Vi sætter

$$f(n) = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 3n + 31 = (n^2 + 3n + 1)^2 - 3(n - 10)\ .$$

Altså er $f(10)$ et kvadrattal, og vi viser, at der ikke findes andre. Vi deler op i tilfælde.

I. $n > 10$. Her ligger $f(n)$ i intervallet $](n^2 + 3n)^2\ ;\ (n^2 + 3n + 1)^2[$ mellem to konsekutive kvadrattal, idet

$$(n^2 + 3n)^2 < f(n) < (n^2 + 3n + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (n^2 + 3n)^2 < (n^2 + 3n + 1)^2 - 3(n - 10) < (n^2 + 3n + 1)^2\ .$$

Højre ulighedstegn er opfyldt, da $n > 10$. Venstre ulighed er ensbetydende med

$$(n^2 + 3n + 1)^2 - (n^2 + 3n)^2 > 3(n - 10) \quad \Leftrightarrow \quad 2n^2 + 3n + 31 > 0\ ,$$

hvilket er opfyldt. Altså er $f(n)$ ikke et kvadrattal.

II. $2 < n < 10$. Her ligger $f(n)$ i intervallet $](n^2 + 3n + 1)^2\ ;\ (n^2 + 3n + 2)^2[$ mellem to konsekutive kvadrattal, idet

$$(n^2 + 3n + 1)^2 < f(n) < (n^2 + 3n + 2)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (n^2 + 3n + 1)^2 < (n^2 + 3n + 1)^2 + 3(10 - n) < (n^2 + 3n + 2)^2\ .$$

Venstre ulighed er opfyldt. Højre ulighed er ensbetydende med

$$3(10 - n) < (n^2 + 3n + 2)^2 - (n^2 + 3n + 1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2n^2 + 9n - 27 > 0\ ,$$

hvilket er opfyldt. Heller ikke i dette tilfælde er $f(n)$ et kvadrattal.

III. $n < -6$. Også her ligger $f(n)$ i intervallet $](n^2 + 3n + 1)^2\ ;\ (n^2 + 3n + 2)^2[$ mellem to konsekutive kvadrattal, idet regningerne forløber som i tilfælde II.

IV. -6 $\leq$ *n* $\leq$ 2. Vi får følgende tabel over funktionsværdier:

n	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(n)$	409	166	67	40	37	34	31	52	145

Ingen af disse værdier er kvadrattal.

b.

1. metode.

Vi har, at

$$n^4 - 7n^2 + 1 = n^4 + 2n^2 + 1 - 9n^2 = (n^2 + 1)^2 - (3n)^2 = (n^2 - 3n + 1)(n^2 + 3n + 1) .$$

Antag, at dette er et kvadrattal, og at p er et primtal, der går op i både $n^2 - 3n + 1$ og $n^2 + 3n + 1$. Så går p op i forskellen

$$n^2 + 3n + 1 - (n^2 - 3n + 1) = 6n .$$

Altså går p op i 2, 3 eller n.
Hvis $p = 2$, er

$$n^4 - 7n^2 + 1 = 16 - 28 + 1 = -11 ,$$

og hvis $p = 3$ er

$$n^4 - 7n^2 + 1 = 81 – 63 + 1 = 19 ,$$

som ikke er kvadrattal. Endelig kan p ikke gå op i n, fordi p går op i

$$n^2 + 3n + 1 = n(n + 3) + 1 = kp + 1 ,$$

hvilket er umuligt, da kp og $kp + 1$ er konsekutive hele tal.
Da der altså ikke findes primtal, der går op i både $n^2 - 3n + 1$ og $n^2 + 3n + 1$, er begge disse tal kvadrattal. Specielt er $n^2 + 3n + 1$ et kvadrattal.
Hvis $n \equiv 1 \pmod 3$, er $n^2 + 3n + 1 \equiv 5 \equiv 2 \pmod 3$, og hvis $n \equiv 2 \pmod 3$, er $n^2 + 3n + 1 \equiv 4 + 6 + 1 \equiv 2 \pmod 3$. Dette er umuligt, da alle kvadrattal er kongruente med 0 eller 1 modulo 3. Altså er $n \equiv 0 \pmod 3$, så $n = 3k$. Dermed er

$$n^2 + 3n + 1 = 9k^2 + 9k + 1$$

et kvadrattal. Imidlertid er

$$(3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 < 9k^2 + 9k + 1 < 9k^2 + 12k + 4 = (3k + 2)^2 .$$

Tallet $n^2 + 3n + 1$ ligger altså mellem to konsekutive kvadrattal og kan derfor ikke selv være et kvadrattal. Dermed er en modstrid opnået.

2. metode (Jens-Søren Andersen, Esbjerg).

I det følgende betegner n et positivt helt tal. Vi ser, at

$$(n^2 - 3)^2 - (n^4 - 7n^2 + 1) = n^4 - 6n^2 + 9 - n^4 + 7n^2 - 1 = n^2 + 8 > 0$$

og

$$(n^2 - 4)^2 - (n^4 - 7n^2 + 1) = n^4 - 8n^2 + 16 - n^4 + 7n^2 - 1 = 15 - n^2 .$$

Altså gælder for $n^2 > 15$, at

$$(n^2 - 4)^2 < n^4 - 7n^2 + 1 < (n^2 - 3)^2 .$$

For $n^2 > 15$, dvs. $n \geq 4$, er $k = n^4 - 7n^2 + 1$ ikke et kvadrattal, fordi k ligger mellem to konsekutive kvadrattal. For $n = 1, 2, 3$ får vi tabellen:

n	1	2	3
$n^4 - 7n^2 + 1$	-5	-11	19

Altså er $n^4 - 7n^2 + 1$ ikke et kvadrattal for nogen hele positive værdier af n.

3. metode (Jan Erik Pedersen, Aakirkeby).

Antag, at $n^4 - 7n^2 + 1$ er et kvadrattal, så vi kan skrive, at

$$n^4 - 7n^2 + 1 = s^2 \quad \Leftrightarrow \quad n^4 - 7n^2 + 1 - s^2 = 0 .$$

Dette er en andengradsligning i n^2 med diskriminanten

$$d = 49 - 4 + 4s^2 = 45 + 4s^2 .$$

Vi må kræve, at d er et kvadrattal, og vi sætter

$$t^2 = 45 + 4s^2 ,$$

hvoraf

$$t^2 - 4s^2 = 45 \quad \Leftrightarrow \quad (t + 2s)(t - 2s) = 45 .$$

Idet $45 = 45 \cdot 1 = 15 \cdot 3 = 9 \cdot 5$, har vi mulighederne

$$(t + 2s , t - 2s) = (45,1) \quad \text{hvoraf} \quad (t,s) = (23,11)$$
$$(t + 2s , t - 2s) = (15,3) \quad \text{hvoraf} \quad (t,s) = (9,3)$$
$$(t + 2s , t - 2s) = (9,5) \quad \text{hvoraf} \quad (t,s) = (7,1) .$$

Af disse værdier fås

$$n^2 = \frac{7 \pm \sqrt{45 + 4s^2}}{2} = \frac{7 \pm t}{2} ,$$

at $n^2 = 15$, $n^2 = 8$ og $n^2 = 7$, som ikke har hele løsninger. Altså findes ingen værdier af n, så $n^4 - 7n^2 + 1$ er et kvadrattal.

c.

1. metode.

Hvis vi sætter $x = a^5$ er

$$P(a) = x^2 + x + 1 = \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{a^{15} - 1}{a^5 - 1} .$$

Her er $a = 1$ rod i nævneren, så

$$P(a) = \frac{a^{15} - 1}{(a-1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)} .$$

Vi sætter $y = a^3$, så vi får

$$a^{15} - 1 = y^5 - 1 = (y - 1)(y^4 + y^3 + y^2 + y + 1) ,$$

så

$$P(a) = \frac{(a^3-1)(a^{12}+a^9+a^6+a^3+1)}{(a-1)(a^4+a^3+a^2+a+1)} = \frac{(a^2+a+1)(a^{12}+a^9+a^6+a^3+1)}{a^4+a^3+a^2+a+1} \ .$$

Division giver

$$\frac{a^{12}+a^9+a^6+a^3+1}{a^4+a^3+a^2+a+1} = a^8-a^7+a^5-a^4+a^3-a+1 \ .$$

Dermed er

$$P(a) = (a^2 + a + 1)(a^8 - a^7 + a^5 - a^4 + a^3 - a + 1) \ .$$

2. metode (Jens-Søren Andersen, Esbjerg).

Vi sætter

$$e_k = e^{\frac{k}{15}\cdot 2\pi\mathrm{i}} = \cos\tfrac{2\pi k}{15} + \mathrm{i}\sin\tfrac{2\pi k}{15} \ , \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 14 \ .$$

Disse er de 15. komplekse enhedsrødder i ligningen $x^{15} = 1$. Vi finder, at

$$e_k \cdot e_{-k} = e^{\frac{k}{15}\cdot 2\pi\mathrm{i}} \cdot e^{-\frac{k}{15}\cdot 2\pi\mathrm{i}} = e^0 = 1$$

og

$$e_k + e_{-k} = e^{\frac{k}{15}\cdot 2\pi\mathrm{i}} + e^{-\frac{k}{15}\cdot 2\pi\mathrm{i}} = \cos\tfrac{2\pi k}{15} + \mathrm{i}\cdot\sin\tfrac{2\pi k}{15} + \cos\tfrac{-2\pi k}{15} + \mathrm{i}\cdot\sin\tfrac{-2\pi k}{15} = 2\cos\tfrac{2\pi k}{15} .$$

Desuden er

$$(x-e_5)(x-e_{-5}) = x^2 - (e_5 + e_{-5})x + e_5 e_{-5}$$

$$= x^2 - 2\cos\tfrac{2\pi}{3}x + 1 = x^2 - 2\cdot(-\tfrac{1}{2})x + 1 = x^2 + x + 1 \ .$$

Erstattes x med x^5 fås

$$(x^5 - e_5)(x^5 - e_{-5}) = x^{10} + x^5 + 1 \ .$$

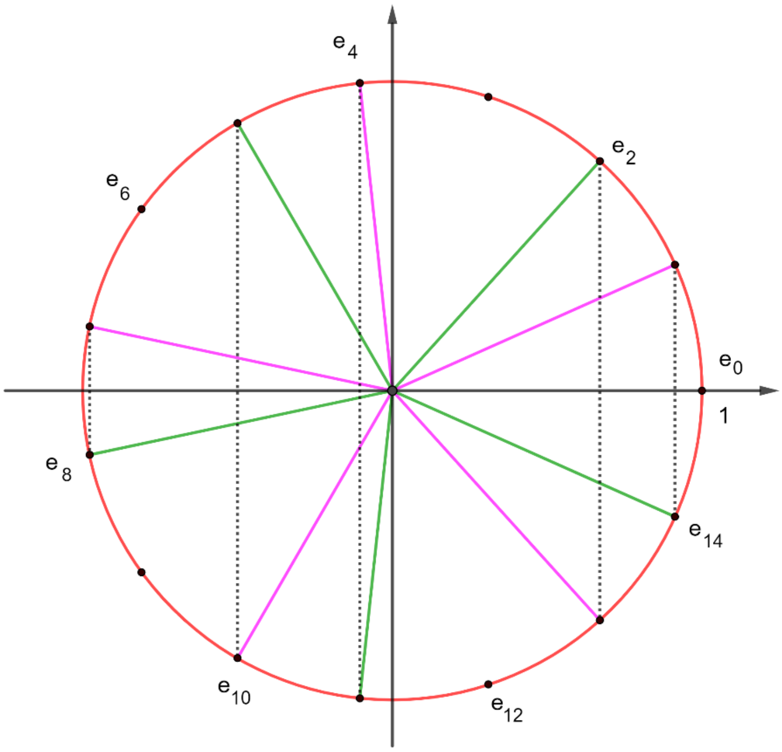
Polynomiet $x^5 - e_5 = x^5 - e^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}$ har rødderne e_1, e_4, e_7, e_{10} og e_{13}. Da x^5 eller e_5 har argumentet $\frac{5}{15}\cdot 2\pi = \frac{1}{3}\cdot 2\pi$, har x som første argument $\frac{1}{15}\cdot 2\pi$ og de øvrige rødder har så argumenterne

$$\tfrac{1}{15}\cdot 2\pi + \tfrac{1}{5}\cdot 2\pi = \tfrac{4}{15}\cdot 2\pi \quad , \quad \tfrac{1}{15}\cdot 2\pi + \tfrac{2}{5}\cdot 2\pi = \tfrac{7}{15}\cdot 2\pi \quad \text{osv.} \ ,$$

dvs. rødderne er netop e_1, e_4, e_7, e_{10} og e_{13}.

Tilsvarende har polynomiet $x^5 - e_{-5} = x^5 - e^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}$ rødderne

$$e_{-1} = e_{14} \ , \ e_{-4} = e_{11} \ , \ e_{-7} = e_8 \ , \ e_{-10} = e_5 \ \text{ og } \ e_{-13} = e_2 \ .$$



Heraf får vi

$$x^{10} + x^5 + 1 = (x^5 - e_5)(x^5 - e_{-5})$$

$$= (x - e_1)(x - e_4)(x - e_7)(x - e_{10})(x - e_{13})(x - e_{-1})(x - e_{-4})(x - e_{-7})(x - e_{-10})(x - e_{-13})$$

$$= (x - e_1)(x - e_{-1})(x - e_4)(x - e_{-4})(x - e_7)(x - e_{-7})(x - e_{10})(x - e_{-10})(x - e_{13})(x - e_{-13})$$

$$= \left(x^2 - 2\cos\tfrac{2\pi}{15}x + 1\right)\left(x^2 - 2\cos\tfrac{4\cdot 2\pi}{15}x + 1\right)\left(x^2 - 2\cos\tfrac{7\cdot 2\pi}{15}x + 1\right)$$

$$\cdot\left(x^2 - 2\cos\tfrac{10\cdot 2\pi}{15}x + 1\right)\left(x^2 - 2\cos\tfrac{13\cdot 2\pi}{15}x + 1\right)$$

$$= (x^2 - 2\cos 24°\, x + 1)\cdot(x^2 - 2\cos 96°\, x + 1)\cdot(x^2 - 2\cos 168°\, x + 1)\cdot$$

$$\cdot(x^2 + x + 1)\cdot(x^2 - 2\cos 312°\, x + 1)\ .$$

Vi har opnået en faktoropløsning af $p(x) = x^{10} + x^5 + 1$ i andengradspolynomier uden rødder (fordi $p(x)$ ikke har nogen rødder). Vi finder, at

$$q(x) = \frac{x^{10} + x^5 + 1}{x^2 + x + 1} = x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1\ .$$

Vi sætter

$$q_1(x) = x^2 - 2\cos 24° x + 1 \quad , \quad q_2(x) = x^2 - 2\cos 96° x + 1 \quad ,$$
$$q_3(x) = x^2 - 2\cos 168° x + 1 \quad , \quad q_4(x) = x^2 - 2\cos 312° x + 1 \quad ,$$

så

$$p(x) = (x^2 + x + 1)\cdot q(x) = (x^2 + x + 1)\cdot q_1(x)\cdot q_2(x)\cdot q_3(x)\cdot q_4(x)\quad .$$

Polynomiet $p(x)$ har ingen reelle rødder. Derfor har $p(x)$ ingen faktorer af ulige grad, idet ethvert polynomium af ulige grad har mindst en reel rod.

Vi undersøger nu, om polynomiet

$$q(x) = x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1$$

kan opløses i faktorer med reelle koefficienter.

Først ser vi på andengradspolynomier som faktorer. Hvis $q(x)$ som faktor har et andengrads-polynomium med 1 som højestegradskoefficient, er dette er af polynomierne
$q_1(x)$, $q_2(x)$, $q_3(x)$ eller $q_4(x)$. Disse har imidlertid ikke hele koefficienter.
I enhver opløsning af q(x) i faktorer af anden grad, er højestegradskoefficienten ± 1, så $q(x)$ kan ikke som faktor indeholde et andengradspolynomium med hele koefficienter.
Dernæst ser vi på den mulighed, at $q(x)$ er produkt af to polynomier af 4. grad med højestegradskoefficient 1. Hvert af disse fjerdegradspolynomier kan opløses i andengrads-polynomier med højestegradskoefficient 1, så vi får opløsningen

$$q(x) = q_1(x) \cdot q_2(x) \cdot q_3(x) \cdot q_4(x) \,.$$

Det ene af fjerdegradspolynomierne må være $q_1(x)q_2(x)$ eller $q_1(x)q_3(x)$ eller $q_1(x)q_4(x)$.
Koefficienterne til x^3 i disse polynomier er henholdsvis

$$-2(\cos 24° + \cos 96°) \quad , \quad -2(\cos 24° + \cos 168°) \quad , \quad -2(\cos 24° + \cos 312°) \;\; ,$$

som ikke er hele tal. Derfor kan $q(x)$ ikke opløses i et produkt af to fjerdegradspolynomier med hele koefficienter, så $q(x)$ er irreducibelt over de hele tal. Den eneste opløsning er altså

$$x^{10} + x^5 + 1 = (x^2 + x + 1) \cdot (x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1) \,.$$

Bemærkning.

Jens-Søren Andersen anfører:

At polynomiet $q(x)$ ikke kan opløses som produkt af to fjerdegradspolynomier med hele koefficienter kan også indses på følgende (mere brutale) måde.
Antag, at vi har opløsningen

$$x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1 = (x^4 + a_2x^3 + a_1x^2 + a_0x + 1) \cdot (x^4 + b_2x^3 + b_1x^2 + b_0x + 1) \,.$$

Multiplikation af parenteserne på højre side af lighedstegnet giver ligningen

$$x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1 = x^8 + (a_2 + b_2)x^7 + (a_1 + b_1 + a_2b_2)x^6$$
$$+ (a_0 + b_0 + a_2b_1 + a_1b_2)x^5 + (2 + a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)x^4 + (a_2 + b_2 + a_1b_0 + a_0b_1)x^3$$
$$+ (a_1 + b_1 + a_0b_0)x^2 + (a_0 + b_0)x + 1$$
$$\Leftrightarrow \quad - x^6 + x^4 - x^3 + x^2 - 1 = (a_2 + b_2)x^6 + (a_1 + b_1 + a_2b_2)x^5$$
$$+ (a_0 + b_0 + a_2b_1 + a_1b_2)x^4 + (2 + a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)x^3 + (a_2 + b_2 + a_1b_0 + a_0b_1)x^2$$
$$+ (a_1 + b_1 + a_0b_0)x + a_0 + b_0 \;\; .$$

Sammenligning af koefficienter giver

$$a_2 + b_2 = -1 \quad \text{(6.gradsled)} \qquad (1)$$
$$a_0 + b_0 = -1 \quad \text{(konstantled)} \qquad (2)$$
$$a_1 + b_1 + a_2b_2 = 0 \quad \text{(5.gradsled)} \qquad (3)$$
$$a_1 + b_1 + a_0b_0 = 0 \text{ (1.gradsled)} \qquad (4)$$
$$a_0 + b_0 + a_2b_1 + a_1b_2 = 1 \text{ (4.gradsled)} \qquad (5)$$

$$a_2 + b_2 + a_1b_0 + a_0b_1 = 1 \text{ (2.gradsled)} \qquad (6)$$

$$2 + a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2 = -1 \text{ (3.gradsled) .} \qquad (7)$$

Antag først, at $a_1 = b_1$. Så fås af (5) og (6), at

$$a_0 + b_0 + a_2a_1 + a_1b_2 = 1 \quad \text{og} \quad a_2 + b_2 + a_1b_0 + a_0a_1 = 1 \ ,$$

og af (1) og (2) fås heraf, at

$$a_2a_1 + a_1b_2 = 2 \quad \text{og} \quad a_1b_0 + a_0a_1 = 2$$

eller

$$a_1(a_2 + b_2) = 2 \quad \text{og} \quad a_1(a_0 + b_0) = 2 \ .$$

Benyttes (1) fås $a_1 = -2$ og dermed $b_1 = -2$ efter forudsætningen $a_1 = b_1$.
Af (3) fås så, at

$$-4 + a_2b_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_2b_2 = 4 \ .$$

Dette er imidlertid umuligt, da $a_2 + b_2 = -1$. Altså er $a_1 \neq b_1$.
Betragt nu ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + y &= -1 \qquad (8) \\ b_1x + a_1y &= 2 \ , \end{aligned}$$

hvis hoveddeterminant er $a_1 - b_1 \neq 0$. dermed har ligningssystemet præcis én løsning (x,y). Efter ligningerne (1), (2), (5) og (6) har vi

$$a_0 + b_0 = -1 \quad \text{og} \quad a_2 + b_2 = -1$$
$$b_1a_0 + a_1b_0 = 1 - a_2 - b_2 = 2 \quad \text{og} \quad b_1a_2 + a_1b_2 = 1 - a_0 - b_0 = 2 \ .$$

Dette viser, at både (a_0,b_0) og (a_2,b_2) er løsninger til ligningssystemet (8), så der må gælde, at

$$a_0 = a_2 \quad \text{og} \quad b_0 = b_2 \ .$$

Af (4) og (3) følger så, at

$$a_2b_0 = a_0b_0 = -a_1 - b_1 \quad \text{og} \quad a_0b_2 = a_0b_0 = -a_1 - b_1 \ .$$

Dette indsættes i (7):

$$2 - a_1 - b_1 + a_1b_1 - a_1 - b_1 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad -2(a_1 + b_1) + a_1b_1 = -3 \ . \qquad (9)$$

Da $a_1 \neq b_1$ (se oven for), er a_1 eller b_1 forskellig fra 2, thi $b_1 = 2$ ville medføre

$$-2(a_1 + 2) + 2a_1 = 3 \ ,$$

hvilket er umuligt. Af symmetrigrunde kan vi antage, at $b_1 \neq 2$. Af (9) får vi så

$$a_1b_1 - 2a_1 = -3 + 2b_1 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = \frac{-3 + 2b_1}{b_1 - 2} = 2 + \frac{1}{b_1 - 2} \ .$$

Da a_1 skal være et helt tal, må $b_1 = 1$ eller $b_1 = 3$. Hvis $b_1 = 1$ får vi $a_1 = b_1 = 1$ i strid med antagelsen om, at $a_1 \neq b_1$. Dermed findes ingen hele tal a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, der opfylder ligningerne (1)-(7).
Der følger så, at polynomiet $q(x)$ ikke kan opløses som produkt af polynomier med hele koefficienter. Det samme gælder polynomiet $x^2 + x + 1$ uden rødder. Den eneste faktoropløsning af $x^{10} + x^5 + 1$ som produkt af polynomier med hele koefficienter er altså

$$x^{10} + x^5 + 1 = (x^2 + x + 1) \cdot (x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1) \ .$$

Besvarelser modtaget fra:

- Jens-Søren Andersen
- Roger Bengtsson
- Walther Janous
- Hans Mortensen
- Jan Erik Pedersen.