Svar på opgave 393 (Oktober 2022)

Opgaverne:

a. Lad a være et helt tal, der ikke er deleligt med 5. Vis, at polynomiet

$$f(x) = x^5 - x + a$$

ikke kan skrives som produkt af to polynomier af positiv grad med hele koefficienter.

b. Polynomiet $p(x) = x^5 - x^3 + x - 2$ har roden a. Vis, at $3 < a^6 < 4$.

c. Bestem hele positive talsæt (a,b), så ligningerne

$$x^2 + ax + b = 0 \quad \text{og} \quad x^2 + bx + a = 0$$

hver især har to hele løsninger.

d. Bestem alle polynomier $P(x)$ med reelle koefficienter, så polynomiet

$$Q(x) = (x + 1) \cdot P(x - 1) - (x - 1) \cdot P(x)$$

er konstant.

Besvarelse:

a.

1. metode.

Antag, at vi har en faktoropløsning af typen

$$f(x) = (x - b) \cdot g(x) ,$$

hvor b er hel og $g(x)$ er et normeret polynomium af 4. grad med hele koefficienter. Så er $f(b) = 0$, dvs.

$$b^5 - b = -a .$$

Da 5 er et primtal gælder efter Fermats sætning, at

$$b^5 - b \equiv 0 \pmod 5 ,$$

så a delelig med 5 i strid med forudsætningen.
Antag så, at vi har faktoropløsningen

$$f(x) = (x^2 - bx - c) \cdot h(x) ,$$

hvor b og c er hele tal og $h(x)$ er et normeret polynomium af tredje grad med hele koefficienter. Ved polynomiers division får vi ved at holde tungen lige i munden, at

$$x^5 - x + a = (x^2 - bx - c)(x^3 + bx^2 + (b^2 + c)x + 2bc + b^3)$$

$$+ (b^4 + 3b^2c + c^2 - 1)x + 2bc^2 + b^3c + a \ .$$

Da restpolynomiet er nulpolynomiet, er

$$b^4 + 3b^2c + c^2 - 1 = 0 \quad \text{og} \quad 2bc^2 + b^3c + a = 0 \ .$$

Vi multiplicerer disse ligninger med henholdsvis b og 3 og trækker fra:

$$b(b^4 + 3b^2c + c^2 - 1) - 3(2bc^2 + b^3c + a) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad b^5 + 3b^3c + bc^2 - b - 6bc^2 - 3b^3c - 3a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b^5 - b - 5bc^2 = 3a \ .$$

Her er $b^5 - b$ delelig med 5 (se oven for), så venstre side er delelig med 5. Dermed er $3a$ delelig med 5, hvilket medfører, at a er delelig med 5. Dette er i strid med forudsætningen om a.

Bemærkning. Man behøver ikke at bruge Fermats sætning for at indse, at $b^5 - b$ er delelig med 5. Vi har nemlig, at

$$b^5 - b = b(b^4 - 1) = (b - 1)(b + 1)b(b^2 + 1) \ .$$

Vi gennemgår de fem muligheder:

Hvis $b \equiv 0 \pmod 5$ er $b^5 - b$ delelig med 5.
Hvis $b \equiv 1 \pmod 5$, er $b - 1$ delelig med 5.
Hvis $b \equiv 4 \pmod 5$, er $b + 1$ delelig med 5.
Hvis $b \equiv 2 \pmod 5$, er $b^2 + 1 \equiv 5 \equiv 0 \pmod 5$
Hvis $b \equiv 3 \pmod 5$ er $b^2 + 1 \equiv 10 \equiv 0 \pmod 5$.

2. metode.

Faktoropløsningen

$$f(x) = (x - b) \cdot g(x)$$

behandles som oven for.
Antag så, at der findes en faktoropløsning af formen

$$f(x) = (x^2 + bx + c)(x^3 + dx^2 + ex + g) \ .$$

Ved udregning fås

$$f(x) = x^5 + (b + d)x^4 + (c + bd + e)x^3 + (be + cd + g)x^2 + (bg + ce)x + cg \ .$$

Idet

$$f(x) = x^5 - x + a$$

følger ligningssystemet

$$b + d = 0 \qquad (1)$$

$$c + bd + e = 0 \qquad (2)$$

$$be + cd + g = 0 \qquad (3)$$

$$bg + ce = -1 \qquad (4)$$

$$cg = a \ . \qquad (5)$$

Af (1) fås $d = -b$, som indsat i (2) giver

$$e = b^2 - c \ ,$$

og af (3) får man dernæst

$$g = -be - cd = -b(b^2 - c) - c \cdot (-b) = -b^3 + 2bc \ .$$

Udtrykkene for e og g indsættes i (4) og (5):

$$b \cdot (-b^3 + 2bc) + c(b^2 - c) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad c(3b^2 - c) = b^4 - 1 \tag{6}$$

og

$$c(-b^3 + 2bc) = a \quad \Leftrightarrow \quad bc(2c - b^2) = a\ . \tag{7}$$

Hvis b eller c er delelig med 5, gælder det samme efter (7) for a. Altså er hverken b eller c delelig med 5. Efter Fermats sætning er så $b^4 - 1$ delelig med 5, og efter (6) er dermed $3b^2 - c$ delelig med 5. Så kan vi slutte således:

$$3b^2 - c \equiv 0 \ (\text{mod } 5) \quad \Rightarrow \quad 6b^2 - 2c \equiv 0 \ (\text{mod } 5) \quad \Rightarrow \quad b^2 - 2c \equiv 0 \ (\text{mod } 5)$$

$$\Rightarrow \quad 2c - b^2 \equiv 0 \ (\text{mod } 5) \quad \Rightarrow \quad a \equiv 0 \ (\text{mod } 5)\ ,$$

hvilket er i strid med forudsætningen om a. En faktoropløsning af $f(x)$ af den omtalte type er derfor umulig.

b.

1. metode.

Vi finder, at $p'(x) = 5x^4 - 3x^2 + 1 > 0$ for alle x, så $p(x)$ er voksende. Desuden er $p(1) = -1$ og $p(2) = 24$, så $p(x)$ har roden a som den eneste rod i intervallet]1;2[.
Nu er

$$a^6 + 1 = (a^2 + 1)(a^4 - a^2 + 1) = \frac{a^2+1}{a} \cdot (a^5 - a^3 + a)\ . \tag{8}$$

Desuden er

$$a^5 - a^3 + a - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^5 - a^3 + a = 2\ ,$$

så vi af (8) får

$$a^6 + 1 = \frac{a^2+1}{a} \cdot 2 = 2\left(a + \frac{1}{a}\right) > 4\ ,$$

fordi $a + \frac{1}{a} > 2$. Altså er $a^6 > 3$.
Vi får, at

$$a^5 - a^3 + a - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^3 + 2 = a^5 + a \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{2}{a^3} = a^2 + \frac{1}{a^2} > 2\ .$$

Altså er

$$1 + \frac{2}{a^3} > 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{a^3} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad a^3 < 2 \quad \Leftrightarrow \quad a^6 < 4\ .$$

2. metode (Jens-Søren Andersen, Esbjerg).

Som oven for ses, at $1 < a < 2$.
Videre er

$$p(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^5 = a^3 - a + 2 \quad \Leftrightarrow \quad a^6 = (a^4 - a^2) + 2a\ .$$

Antag nu, at $a^6 \le 3$. Så er

$$(a^4 - a^2) + 2a \le 3\ ,$$

og da $a > 1$ følger heraf, at

$$0 < a^4 - a^2 \le 3 - 2a\ .$$

Dette giver vurderingen

$$p(a) = a(a^4 - a^2) + a - 2 \leq a(3 - 2a) + a - 2 = -2(a - 1)^2 < 0$$

i strid med, at a er rod i $p(x)$.
Antag dernæst, at $a^6 \geq 4$. Så er

$$a^6 = (a^4 - a^2) + 2a \geq 4 \ ,$$

hvoraf

$$a^4 - a^2 \geq 4 - 2a \ ,$$

og da $1 < a < 2$, får vi vurderingen

$$p(a) = a(a^4 - a^2) + a - 2 \geq a(4 - 2a) + a - 2$$
$$= -2a^2 + 5a - 2 = (1 - 2a)(a - 2) > 0$$

i strid med, at a er rod i $p(x)$. Da altså ingen af ulighederne $a^6 \leq 3$ og $a^6 \geq 4$ er opfyldt, må $3 < a^6 < 4$.

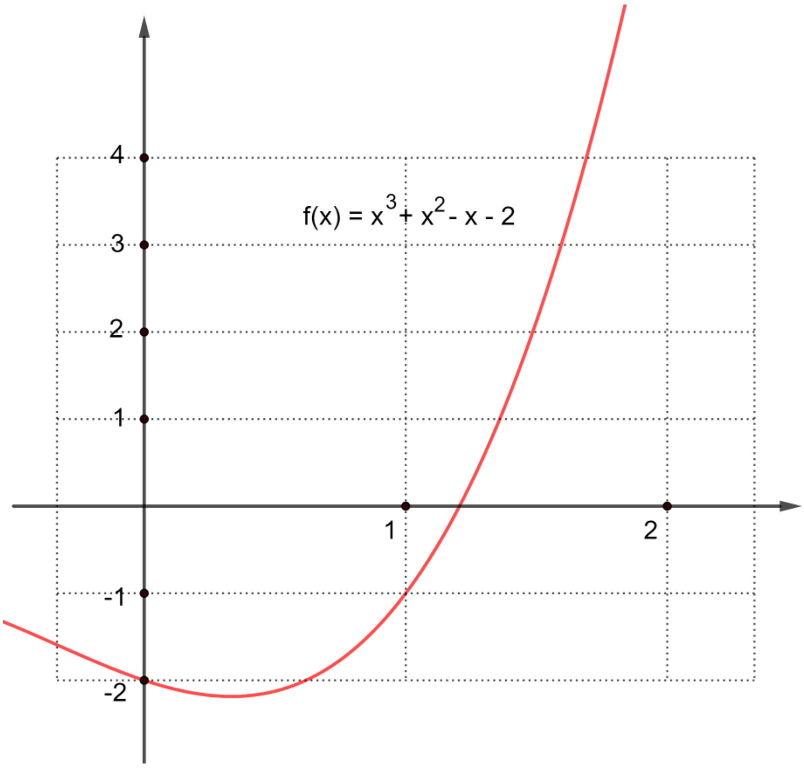
3. metode (Roger Bengtsson, Lund).

Vi får faktoropløsningen

$$x^5 - x^3 + x - 2 = (x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 - x - 2) \ .$$

Da $x^2 - x + 1 > 0$ for alle x, er a rod i polynomiet $q(x) = x^3 + x^2 - x – 2$, så a opfylder, at

$$a^3 + a^2 - a - 2 = 0 \ . \qquad (9)$$



Ved polynomiers division fås, at

$$a^6 = (a^3 + a^2 - a - 2)(a^3 - a^2 + 2a - 1) + a^2 + 3a - 2 \ ,$$

og ved hjælp af (9) får vi heraf

$$a^6 = a^2 + 3a - 2 \ . \tag{10}$$

Efter (9) får vi

$$0 = a^3 + a^2 - a - 2 = (a - 2)(a^2 + 3a - 2) + 7a - 6 = (a - 2)\cdot a^6 + 7a - 6 \ ,$$

hvoraf

$$a^6 = \frac{6-7a}{a-2} \ .$$

Nu er

$$q'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 3(x+1)(x - \tfrac{1}{3}) \ ,$$

Så $q(x)$ er voksende for $x > \frac{1}{3}$. Desuden er $q(1) = -1$ og $q(2) = 8$, så $1 < a < 2$. Vi skal derfor vise, at

$$3 < \frac{6-7a}{a-2} < 4 \ .$$

Da $a - 2 < 0$ er denne ulighed ensbetydende med

$$3(a - 2) > 6 - 7a > 4(a - 2) \quad \Leftrightarrow \quad 3a - 6 > 6 - 7a \ \wedge \ 6 - 7a > 4a - 8$$

$$\Leftrightarrow \quad 10a > 12 \ \wedge \ 14 > 11a \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{6}{5} < a < \tfrac{14}{11} \ . \tag{11}$$

Vi får funktionsværdierne

$$q\left(\tfrac{6}{5}\right) = -\tfrac{4}{125} < 0 \quad \text{og} \quad q\left(\tfrac{14}{11}\right) = \tfrac{544}{1331} > 0 \ .$$

Derfor er (11) sand, hvilket skulle vises.

Bemærkning. Ved hjælp af regnemaskine finder man, at $a \approx 1{,}2055$ og $a^6 \approx 3{,}0701$. Vurderingen $3 < a^6 < 4$ er altså ikke særlig præcis. Kan man ved snedige regninger som ovenstående opnå en bedre vurdering?

c.

1. metode.

Lad ligningernes løsninger være r, s og t, u. Altså er

$$x^2 + ax + b = (x - r)(x - s) = x^2 - (r + s)x + rs$$

$$x^2 + bx + a = (x - t)(x - u) = x^2 - (t + u)x + tu \ .$$

Heraf fås

$$a = -r - s = tu \quad , \quad b = -t - u = rs \ . \tag{12}$$

Da a og b er positive, er $-r - s > 0$ og $rs > 0$. Heraf følger, at r og s begge er negative. På samme måde er t og u begge negative. Da r, s, t og u er hele, har vi

$$r \leq -1 \ , \ s \leq -1 \ , \ t \leq -1 \ , \ u \leq -1 \ .$$

På grund af symmetri kan vi antage, at $a < b$. Så er

$$tu < -t - u \quad \Leftrightarrow \quad tu + t + u < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t + 1)(u + 1) < 1 \,. \tag{13}$$

Hvis t og u opfylder, at $t \le -2$ og $u \le -2$, ville $t + 1 \le -1$ og $u + 1 \le -1$, hvilket ville medføre, at $(t + 1)(u + 1) \ge 1$ i strid med (13). Derfor er mindst et af tallene t og u lig med -1.
Lad fx $t = -1$. Så får vi

$$-r - s = tu \quad \Leftrightarrow \quad -r - s = -u \qquad \text{og} \quad -t - u = rs \quad \Leftrightarrow \quad rs = 1 - u \,.$$

Heraf fås

$$rs = 1 - r - s \quad \Leftrightarrow \quad rs + r + s = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (r + 1)(s + 1) = 2 \,.$$

Da r og s er negative og hele, har vi kun mulighederne

$$(r,s) \;:\; (-2,-3) \;,\; (-3,-2) \,.$$

Af (12) får vi så, at

$$a = 5 = tu \quad , \quad b = -t - u = 6 \;,$$

og da $t = -1$, er $u = -5$. Ligningerne er altså

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \text{ med løsningerne } -2 \text{ og } -3$$
$$x^2 + 6x + 5 = 0 \text{ med løsningerne } -1 \text{ og } -5 \,.$$

Hvis $a = b$, har ligningen $x^2 + ax + a$ diskriminanten $a^2 - 4a = a(a - 4)$. Da a $\neq$ 0, får vi for $a = 4$, at $x^2 + 4x + 4 = 0$ har løsningen $x = -2$, altså kun en hel løsning. Hvis $a > 4$, er $a(a - 4)$ ikke et kvadrattal.

2. metode (Jens-Søren Andersen, Esbjerg).

Diskriminanten for polynomiet $x^2 + ax + b$ er $d = a^2 - 4b$. Hvis $d = a^2 - 4b$ er et kvadrattal, har tallene

$$\sqrt{d} \;,\; d = a^2 - 4b \quad , \quad a^2 \quad , \; a$$

samme paritet, så $-a \pm \sqrt{d}$ er lige og $\frac{1}{2}\left(-a \pm \sqrt{d}\right)$ er hele. Vi kan derfor sige, at polynomiet $x^2 + ax + b$ har to forskellige hele rødder netop hvis $a^2 - 4b$ er et positivt kvadrat- tal.
At begge ligninger

$$x^2 + ax + b = 0 \quad \text{og} \quad x^2 + bx + a = 0$$

har to forskellige hele løsninger er derfor ensbetydende med, at $a^2 - 4b$ og $b^2 - 4a$ begge er positive kvadrattal.
Antag nu i det følgende, at a og b er positive hele tal, så $a^2 - 4b$ og $b^2 - 4a$ begge er positive kvadrattal. Så er

$$a^2 - 4b > 0 \quad \Leftrightarrow \quad b < \tfrac{1}{4}a^2 \qquad \text{og} \qquad b^2 - 4a > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a < \tfrac{1}{4}b^2 \;,$$

og dermed

$$0 < b < \tfrac{1}{4}a^2 < \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{4}b^2\right)^2 = \tfrac{1}{64}b^4 \;,$$

så vi får

$$b < \tfrac{1}{64}b^4 \;\Leftrightarrow\; b^3 > 64 \;\Leftrightarrow\; b > 4 \,.$$

På grund af symmetrien i a og b kan vi antage, at $a \ge b$, altså $a \ge b \ge 4$.
Lad $-c_1$ og $-c_2$ være løsninger til ligningen $x^2 + ax + b = 0$. Så er

$$a = c_1 + c_2 \quad \text{og} \quad b = c_1 c_2 \,.$$

Heraf følger, at c_1 og c_2 er positive hele tal, der er mindre eller lig med b.
Vi har, at

$$c_1^2 - ac_1 + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ac_1 = c_1^2 + b \quad \Leftrightarrow \quad a = c_1 + \tfrac{b}{c_1} \; .$$

Funktionen

$$f(x) = x + \tfrac{b}{x}$$

har i intervallet $[1;b]$ den afledede

$$f\,'(x) = 1 - \tfrac{b}{x^2} = \tfrac{1}{x^2}(x^2 - b) \; ,$$

så funktionen er aftagende i $\left[1;\sqrt{b}\right]$ og voksende i $\left[\sqrt{b};b\right]$. Vi får, at

$$f(1) = 1 + b = f(b) \; .$$

Altså har vi

$$b \le a = c_1 + \tfrac{b}{c_1} \le 1 + b \; .$$

Dermed er $a = b$ eller $a = b + 1$.

I. Hvis $a = b$, sætter vi $n = a^2 - 4b$, så

$$n + 4 = a^2 + 4a + 4 = (a - 2)^2 \; .$$

Her er n og $n + 4$ positive kvadrattal, hvilket er umuligt.

II. Hvis $a = b + 1$, sætter vi $n = b^2 - 4a$, så

$$n + 8 = b^2 - 4(b + 1) + 8 = (b - 2)^2 \; .$$

Altså er n og $n + 8$ positive kvadrattal. Den eneste mulighed er $n = 1$. Så er

$$(b - 2)^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad b = 5 \; ,$$

hvilket giver $a = 6$. Så gælder, at

$$x^2 + 6x + 5 = 0 \quad \text{har løsningerne -1 og 5} \; ,$$
$$x^2 + 6x + 5 = 0 \quad \text{har løsningerne -2 og -3} \; .$$

Dermed er

$$(a,b) \;:\; (5,6)\,,\,(6,5) \; .$$

3. metode.

Lad x_1 og x_2 være løsninger til ligningen $x^2 + ax + b = 0$. Vi har så, at

$$\left(|x_1|-1\right)\left(|x_2|-1\right) \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x_1x_2| - |x_1| - |x_2| + 1 \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x_1x_2| \ge |x_1| + |x_2| - 1 \; .$$

Altså gælder

$$|b| = |x_1x_2| \ge |x_1| + |x_2| - 1 \ge |x_2 + x_2| - 1 = |a| - 1 \; .$$

På samme måde følger af ligningen $x^2 + bx + a = 0$, at

$$|a| \ge |b| - 1 \; .$$

Vi har derfor nu, at

$$|a| - |b| \le 1 \quad \text{og} \quad |b| - |a| \le 1 \qquad \text{eller} \qquad \big||a| - |b|\big| \le 1 \; .$$

Hvis $a = b$ er diskriminanten $a^2 - 4b = a^2 - 4a$, og da dette tal er et kvadrattal, er $a = 4$. Ligningen $x^2 + 4x + 4 = 0$ har den ene løsning $x = -2$ og opfylder ikke opgavens krav.

Den anden mulighed er

$$|a| = |b| \pm 1 .$$

Vi skal derfor se på ligningerne

$$x^2 + kx + k + 1 = 0 \quad \text{og} \quad x^2 + (k + 1)x + k = 0 .$$

I den første fås

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4(k+1)}}{2} = \frac{-k \pm \sqrt{(k-2)^2 - 8}}{2} .$$

Her skal $(k - 2)^2 - 8$ være et kvadrattal, og det er kun muligt, hvis $k = 5$. Så er ligningen $x^2 + 5x + 6 = 0$ med løsningerne $x = -3$ og $x = -2$.
Den anden ligning har løsningerne $x = -1$ og $x = k$, altså to hele løsninger for alle hele værdier af k. Ligningen er her $x^2 + 6x + 5 = 0$ med løsningerne $x = -1$ og $x = -5$.

Bemærkning. Hvis vi blot kræver, at a og b er hele tal, er der uendelig mange talpar (a,b), der opfylder kravene. Blot for $a = 0$ har vi $(a,b) = (0,-k^2)$ for ethvert naturligt tal k, idet

$$x^2 - k^2 = 0 \text{ har løsningerne } \pm k \quad , \quad x^2 - k^2x = 0 \text{ har løsningerne } 0 \text{ og } k^2 .$$

Bemærkning. Vi husker opgave 195 fra december 2002, son 'næsten' er magen til ovenstående:

Find alle par (a,b) af hele tal, således at $a^2 + 4b$ og $b^2 + 4a$ begge er kvadrattal.

Her fandt vi løsningerne

$$(a,b) \;:\; (k^2,0) \;,\; (0,k^2) \;,\; (k,1 - k) \;,\; (-6,-5) \;,\; (-5,-6) \;,\; (-4,-4) .$$

d.

1. metode.

Hvis $P(x)$ er et konstant polynomium med $P(x) = k$, er

$$Q(x) = (x + 1)\cdot k - (x - 1)\cdot k = 2k ,$$

som er konstant. Alle konstante polynomier $P(x)$ opfylder altså kravet.
Antag så, at $P(x)$ ikke er konstant. Vi skriver, at

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 ,$$

hvor $n \geq 1$ og $a_n \neq 0$. Så er

$$P(x - 1) = a_n(x - 1)^n + a_{n-1}(x - 1)^{n-1} + \cdots + a_1(x - 1) + a_0 ,$$

og

$$(x + 1)\cdot P(x - 1) = a_n(x - 1)^n(x + 1) + a_{n-1}(x - 1)^{n-1}(x + 1) + \cdots + a_0(x + 1)$$

$$= a_n(x^n - nx^{n-1} + \cdots)(x + 1) + a_{n-1}(x^{n-1} - (n - 1)x^{n-2} + \cdots)(x + 1) + \cdots ,$$

$$(x - 1)\cdot P(x) = a_nx^n(x - 1) + a_{n-1}x^{n-1}(x - 1) + \cdots + a_1x(x - 1) + a_0(x - 1) .$$

Vi ser på koefficienten til x^n i polynomiet $Q(x)$.

I polynomiet $(x + 1) \cdot P(x - 1)$ er den

$$a_n - na_n + a_{n-1} ,$$

og i polynomiet $(x - 1) \cdot P(x)$ er den

$$-a_n + a_{n-1} ,$$

og derfor er koefficienten til x^n i $Q(x)$:

$$a_n - na_n + a_{n-1} - (-a_n + a_{n-1}) = (2 - n)a_n .$$

Da $Q(x)$ er konstant, er denne koefficient 0, så $n = 2$. Dermed er $P(x)$ af anden grad, dvs. vi har, at $P(x) = ax^2 + bx + c$, hvor $a \neq 0$.
Ved indsættelse heraf i udtrykket for $Q(x)$, får vi

$$Q(x) = (x + 1)[a(x - 1)^2 + b(x - 1) + c] - (x - 1)(ax^2 + bx + c)$$

Ved flittig brug af elementær algebra får vi

$$Q(x) = (b - a)x + a - b + 2c .$$

Da $Q(x)$ er konstant, er $a = b$, så

$$Q(x) = a - a + 2c = 2c .$$

Altså er $$P(x) = ax^2 + ax + c .$$

Alle polynomier af denne type er altså løsninger til problemet, hvilket ses ved kontrol.

2. metode.

Vi får, at

$$Q(1) = 2 \cdot P(0) \quad \text{og} \quad Q(-1) = 2 \cdot P(-1) .$$

Da $Q(x)$ er konstant, følger, at $P(0) = P(-1)$. Vi sætter $c = P(0) = P(-1)$. Polynomiet $P(x) - c$ har nulpunkter $x = 0$ og $x = -1$, så

$$P(x) - c = x(x + 1) \cdot R(x) , \tag{14}$$

hvor $R(x)$ er et polynomium med reelle koefficienter. Idet

$$P(x) = x(x + 1) \cdot R(x) + c ,$$

er

$$P(x - 1) = (x - 1) \cdot x \cdot R(x - 1) + c ,$$

så vi ved indsættelse i udtrykket for $Q(x)$ får, at

$$Q(x) = (x + 1) \cdot [(x - 1) \cdot x \cdot R(x - 1) + c] - (x - 1) \cdot [x \cdot (x + 1) \cdot R(x) + c]$$
$$= (x - 1) \cdot x \cdot (x + 1) \cdot R(x - 1) + c(x + 1) - (x - 1) \cdot x \cdot (x + 1) \cdot R(x) - c(x - 1)$$
$$= (x - 1) \cdot x \cdot (x + 1) \cdot [R(x - 1) - R(x)] + 2c .$$

Dette er konstant, så $R(x - 1) - R(x)$ er nulpolynomiet. Altså er $R(x - 1) = R(x)$ for alle x og specielt er

$$R(0) = R(1) = R(2) = \cdots$$

Dermed er $R(x)$ konstant, så vi sætter $R(x) = d$. Så gælder efter (14), at

$$P(x) = x(x + 1)d + c = dx^2 + dx + c .$$

Ved indsættelse ses, at polynomier af denne type opfylder kravet om, at $Q(x)$ er konstant.

Besvarelser modtaget fra:

- Jens-Søren Andersen
- Roger Bengtsson
- Walther Janous
- Jan Erik Pedersen