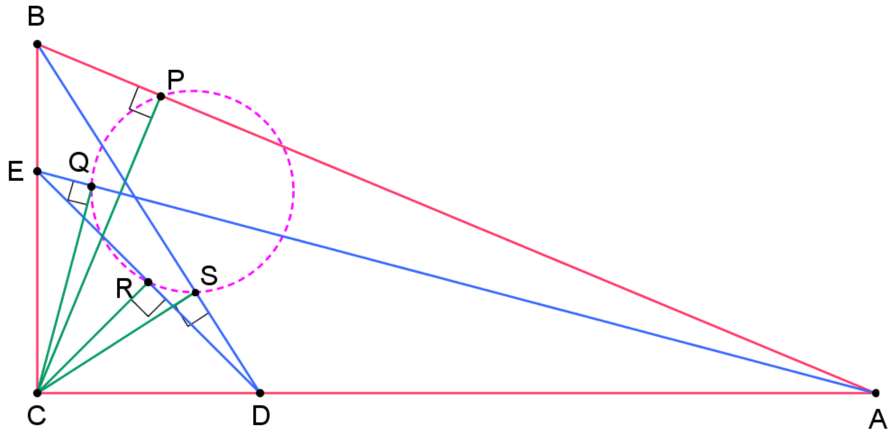
Svar på opgave 391 (August 2022)

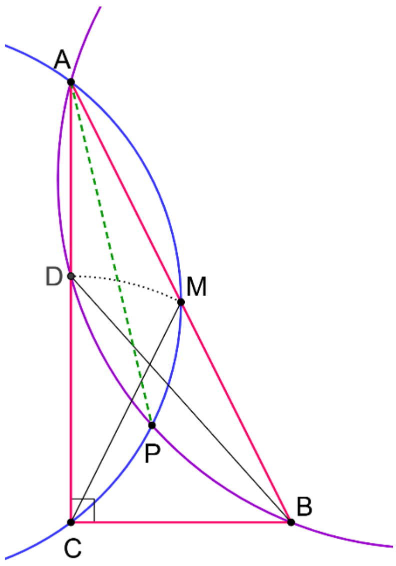
Opgaverne:

Et par smukke, men mindre kendte sætninger om den retvinklede trekant.

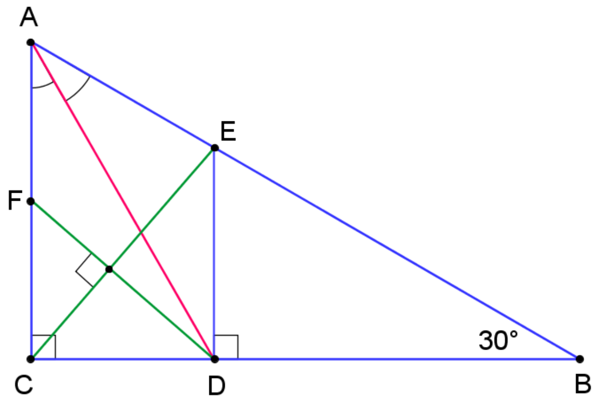
a. I ΔABC er $C = 90°$ og punkterne D og E ligger på AC og BC. Projektionerne af C på AB, AE, DE og BD er P, Q, R og S. Vis, at P, Q, R og S ligger på en cirkel.



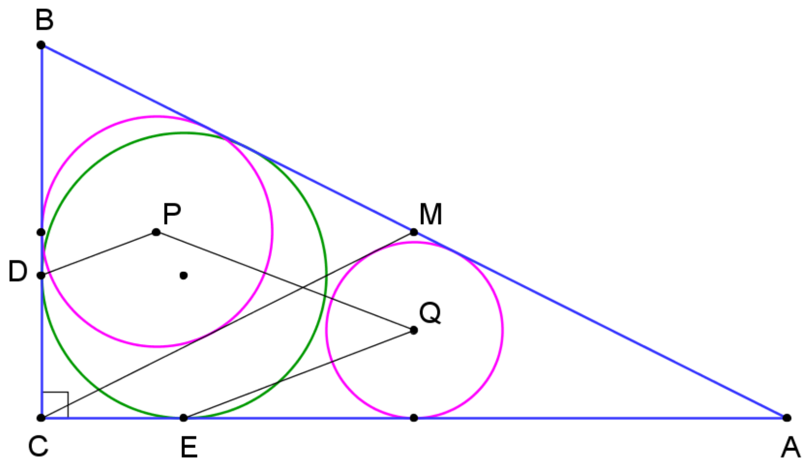
b. I ΔABC er $C = 90°$ og M er midtpunkt af hypotenusen AB. Punktet D ligger på AC, så $CD = CM$. De omskrevne cirkler for ΔAMC og ΔBDA skærer hinanden endnu en gang i punktet P. Vis, at AP er vinkelhalveringslinje for vinkel A.



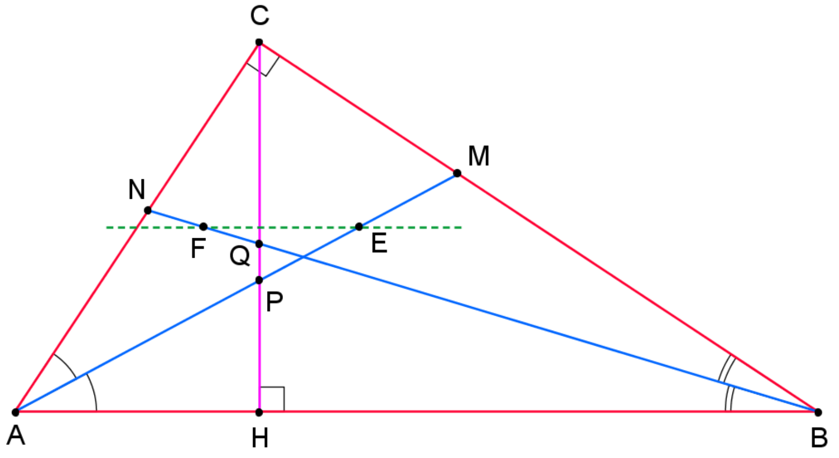
c. I ΔABC er C = 90° og B = 30° og AD er vinkelhalveringslinje for A. Desuden er F midtpunkt af AC. Den vinkelrette på BC i D skærer AB i E. Vis, at $CE \perp DF$.



d. I ΔABC er C = 90°. Den indskrevne cirkel i ΔABC tangerer BC og AC i D og E. Lad M være midtpunkt af AB og P og Q centrer i de indskrevne cirkler i ΔBCM og ΔACM. Vis, at $PD /\!/ QE$ og at $PD^2 + QE^2 = PQ^2$.



e. I ΔABC er C = 90° og AM og BN er vinkelhalveringslinjer fra A og B. Højden CH skærer AM og BN i P og Q. Vis, at forbindelseslinjen mellem midtpunkterne E og F af PM og QN er parallel med hypotenusen AB.



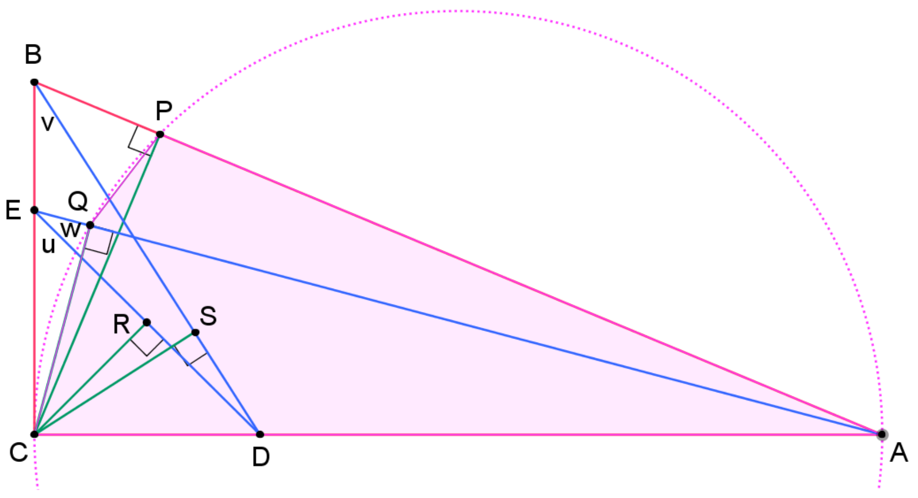
Besvarelse:

a. Vi sætter

$$u = \angle CED \ , \ v = \angle CBD \ , \ w = \angle DEA \ .$$

I $\square CQPA$ er vinklerne CQA og CPA rette, så firkanten er indskrivelig, og AC er diameter i den omskrevne cirkel. Så er $\angle CQP = 180° - A$, og lige store periferivinkler i den omskrevne cirkel giver

$$\angle AQP = \angle ACP = 90° - A = B \ .$$

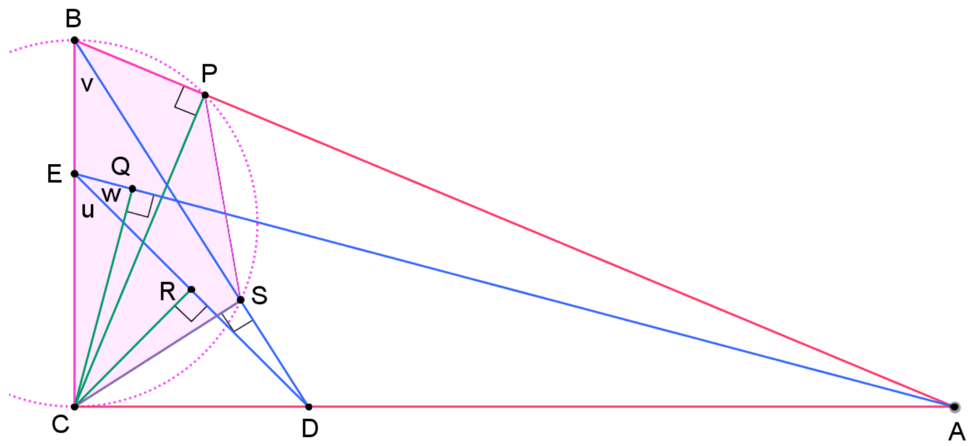


Modstående vinkler er supplementvinkler, så $\angle QPA = 180° - \angle QCA$. Lige store periferivinkler giver

$$\angle QPC = \angle QAC = 90° - \angle QCA = \angle ECQ = 90° - (u + w) \ . \qquad (1)$$

I □*BPSC* er vinklerne *BPC* og *BSC* rette, så firkanten er indskrivelig, og *BC* er diameter i den omskrevne cirkel. Vi får, at $\angle BPS = 180° - \angle BCS$ og

$$\angle CPS = \angle BPS - \angle BPC = \angle BPS - 90° = (180° - \angle BCS) - 90° = 90° - \angle BCS = v. \quad (2)$$



Modstående vinkler i firkanten giver

$$\angle PSC = 180° - B ,$$

og lige store periferivinkler i den omskrevne cirkel giver

$$\angle PSB = \angle PCB = 90° - B = A .$$

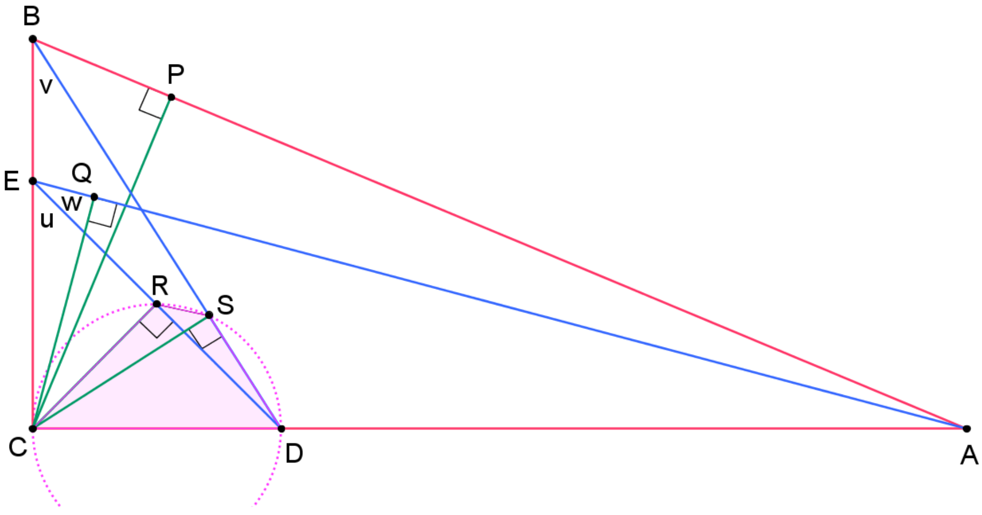
I □*CRSD* er $\angle CRD = \angle CSD = 90°$, så firkanten er indskrivelig og diameteren i den omskrevne cirkel er *CD*. Modstående vinkler i firkanten giver

$$\angle RSD = 180° - \angle RCD = 180° - (90° - \angle ECR)$$

$$= 90° + \angle ECR = 90° + (90° - u) = 180° - u .$$

Lige store periferivinkler i den omskrevne cirkel giver

$$\angle RSC = \angle RDC = 90° - u .$$



Desuden giver lige store periferivinkler, at

$$\angle CRS = \angle DRS + \angle CRD = \angle DRS + 90° = \angle DCS + 90°$$

$$= 90° - \angle BCS + 90° = 180° - \angle BCS = 180° - (90° - v) = 90° + v \ .$$

Af denne sidste omskrivning får, at

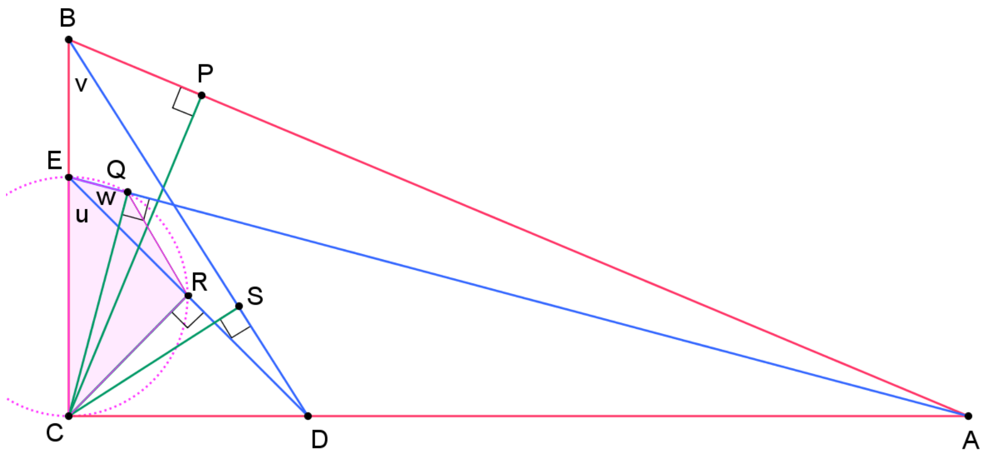
$$\angle DRS = v \ . \tag{3}$$

I $\square CRQE$ er $\angle CRE = \angle CQE = 90°$, så firkanten er indskrivelig og diameteren i den omskrevne cirkel er CE. Modstående vinkler giver

$$\angle CRQ = 180° - \angle CEQ = 180° - (u + w) \ .$$

Lige store periferivinkler giver, at

$$\angle ERQ = \angle ECQ = 90° - (u + w) \ . \tag{4}$$



Så fås efter (3) og (4), at

$$\angle QRS = 180^\circ - \left(\angle ERQ + \angle DRS\right) = 180^\circ - (90^\circ - u - w + v) = 90^\circ + u + w - v,$$

og efter (1) og (2) er

$$\angle QPS = \angle QPC + \angle CPS = 90^\circ - u - w + v\ .$$

Dermed er

$$\angle QRS + \angle QPS = 180^\circ,$$

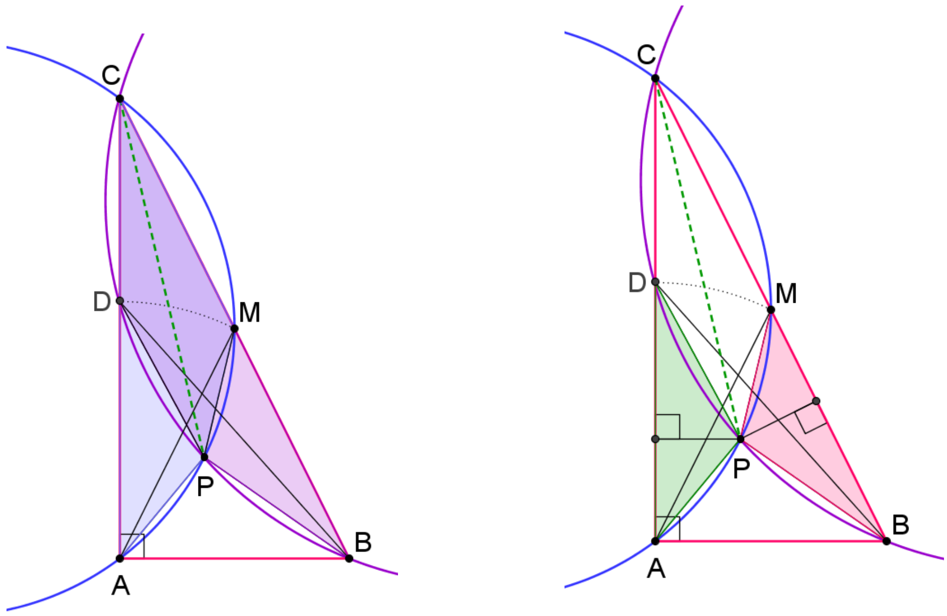
så □*PQRS* er indskrivelig.

b. Da □*BPDA* er indskrivelig, er

$$\angle PBA = 180^\circ - \angle ADP = \angle CDP\ ,$$

og da □*CPMA* er indskrivelig, er

$$\angle ACP = 180^\circ - \angle PMA = \angle PMB.$$



Da ΔABC er retvinklet, er $CM = MB$, og da $CM = CD$, er $CD = MB$. Nu ser vi, at ΔPMB og ΔPCD er kongruente, fordi

$$MB = CD \quad , \quad \angle PMB = \angle ACP = \angle PCD \quad , \quad \angle PBM = \angle PBA = \angle CDP\ ,$$

så de to trekanter har en side og to hosliggende vinkler parvis lige store. Dermed er højderne fra *P* på siderne *MB* og *CD* lige lange, så *P* har samme afstand fra *AC* og *AB*.

Altså ligger *P* på vinkelhalveringslinjen for *A*.

Bemærkning. Det lan tænkes, at kateten b er så kort, at D falder på forlængelsen af CA ud over A. Dette sker, hvis $b < MC$, så vi har

$$b < MC \quad \Leftrightarrow \quad b < \tfrac{1}{2}c$$

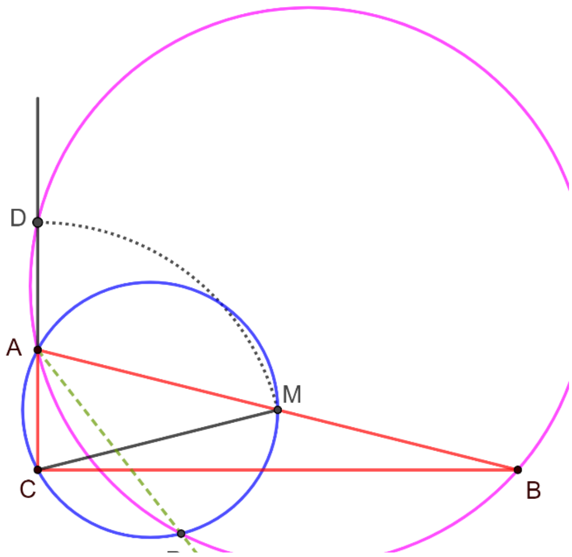
$$\Leftrightarrow \quad 2b < c \quad \Leftrightarrow \quad 4b^2 < c^2$$

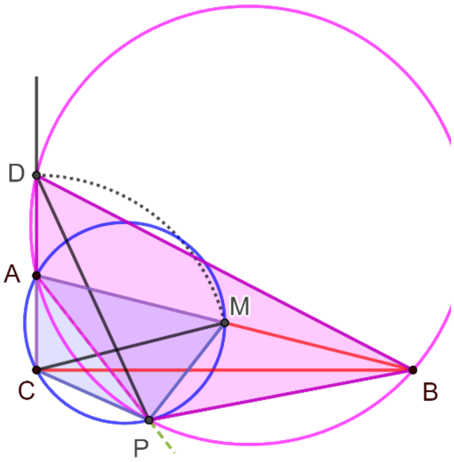
$$\Leftrightarrow \quad 4b^2 < a^2 + b^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3b^2 < a^2$$

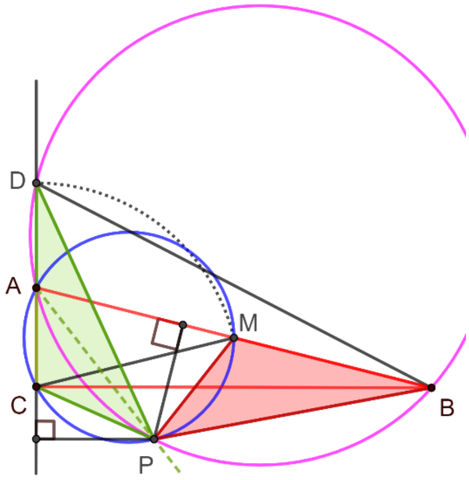
$$\Leftrightarrow \quad \tfrac{a}{b} > \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \tan A > \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad A > 60^\circ.$$

Igen er □*BPAD* (før var det □*BPDA*) og □*CPMA* indskrivelige, og argumentet forløber som før.





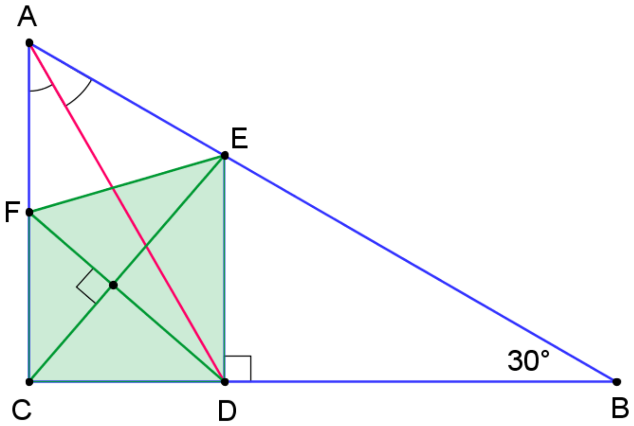


c. Vi har, at $AC = b$ og $AB = 2b$, da ΔABC er en 30°-60°-90°-trekant.
Desuden er $BC = b\sqrt{3}$ og $AF = \tfrac{1}{2}b$.
Nu er ΔACD en 30°-60°-90°-trekant, så $CD = \frac{b}{\sqrt{3}}$ og

$$BD = BC - CD = b\sqrt{3} - \frac{b}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}b\sqrt{3} \ .$$

Da ΔBDE er en 30°-60°-90°-trekant, er $DE = \frac{BD}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}b$.

Vi ser, at ΔDAE er ligebenet, så $AE = DE = \frac{2}{3}b$.



I ΔEFA giver cosinusrelationen

$$EF^2 = AF^2 + AE^2 - 2AF \cdot AE \cdot \cos 60°$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}b\right)^2 + \left(\tfrac{2}{3}b\right)^2 - 2 \cdot \tfrac{1}{2}b \cdot \tfrac{2}{3}b \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{4}{9}b^2 - \tfrac{1}{3}b^2 = \tfrac{13}{36}b^2 .$$

Dermed får vi

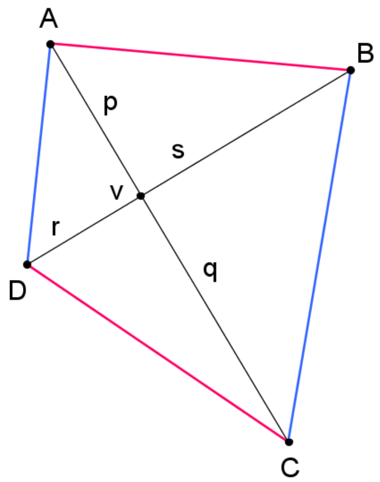
$$EF^2 + CD^2 = \tfrac{13}{36}b^2 + \left(\tfrac{b}{\sqrt{3}}\right)^2 = \tfrac{25}{36}b^2 ,$$

$$CF^2 + DE^2 = \tfrac{1}{4}b^2 + \left(\tfrac{2}{3}b\right)^2 = \tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{4}{9}b^2 = \tfrac{25}{36}b^2 .$$

Dermed er $\square DEFC$ en ortodiagonal firkant, så $CE \perp DF$.

For en ordens skyld viser vi, at hvis summen af modstående siders kvadrater i en firkant er den samme for de to par modstående sider, så er diagonalerne ortogonale.

Med figurens betegnelser er v vinklen mellem diagonalerne og p, q, r og s de stykker, som skæringspunktet deler dem i. Cosinusrelationen giver



$$AD^2 + BC^2 = p^2 + q^2 + r^2 + s^2 - 2\cos v \cdot (pr + qs)$$
$$AB^2 + CD^2 = p^2 + q^2 + r^2 + s^2 + 2\cos v \cdot (rq + ps)$$

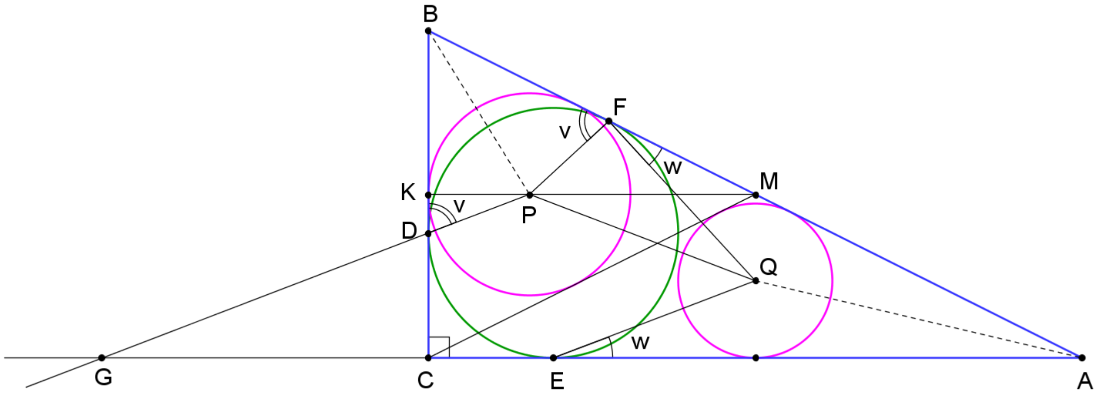
,

hvoraf

$$AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2 \quad \Leftrightarrow \quad (rq + ps)\cos v = (-pr - qs)\cos v$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos v \cdot (p + q)(r + s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = 90° .$$

d. Den indskrevne cirkel i ΔABC tangerer AB i F. Så er $BD = BF$, og da BP er vinkelhalveringslinje for $\angle CBA$, er ΔPBD og ΔPBF kongruente, så $PD = PF$ og $\angle PDB = \angle PFB$.



På samme måde er ΔQAF og ΔQAE kongruente, så $QE = QF$ og $\angle QEA = \angle QFA$.
Forlængelsen af PD ud over D skærer AC i G. Da ΔCBM er ligebenet, er MP midtnormal for BC og derfor skærer MP siden BC i K, hvor $BK = KC$. Vi finder i ΔBPK og ΔBMK, at

$$PK = BK \cdot \tan\tfrac{1}{2}B = BM \cdot \cos B \cdot \tan\tfrac{1}{2}B = \cos B \cdot \tfrac{1}{2}AB \cdot \tan\tfrac{1}{2}B$$

$$= \tfrac{1}{2}AB \cdot \sin A \cdot \tan\tfrac{1}{2}B = AB \cdot \tan\tfrac{1}{2}B \cdot \sin\tfrac{1}{2}A \cdot \cos\tfrac{1}{2}A \,. \qquad (1)$$

Nu er det kendt, at radius i den retvinklede trekants indskrevne cirkel er

$$CD = \tfrac{1}{2}(AC + BC - AB)\,,$$

hvoraf

$$BD = BC - CD = BC - \tfrac{1}{2}(AC + BC - AB) = \tfrac{1}{2}(BC + AB - AC)\ .$$

Så er

$$KD = KC - CD = \tfrac{1}{2}BC - CD = \tfrac{1}{2}BC - \tfrac{1}{2}(AC + BC - AB)$$

$$= \tfrac{1}{2}(AB - AC) = \tfrac{1}{2}(AB - AB\cdot\cos A) = \tfrac{1}{2}AB(1 - \cos A) = AB\cdot\sin^2\tfrac{1}{2}A\ . \qquad (2)$$

Vi sætter

$$v = \angle PDB \ \text{ og } \ w = \angle QEA\,,$$

og får i ΔPKD ved hjælp af (1) og (2), at

$$\tan v = \frac{PK}{KD} = \frac{AB\cdot\tan\frac{1}{2}B\cdot\sin\frac{1}{2}A\cdot\cos\frac{1}{2}A}{AB\cdot\sin^2\frac{1}{2}A} = \frac{\tan\frac{1}{2}B\cdot\cos\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}A} = \frac{\tan\frac{1}{2}B}{\tan\frac{1}{2}A}\ .$$

På samme måde er

$$\tan w = \frac{\tan\frac{1}{2}A}{\tan\frac{1}{2}B}\ .$$

Da $\tan v \cdot \tan w = 1$, er $v + w = 90°$. Endelig er

$$\angle QEA = w = 90° - v = 90° - \angle CDG = \angle DGC\,.$$

Derfor er $PD /\!/ QE$.

Nu er

$$\angle PFQ = 180° - \angle QFM - \angle PFB = 180° - \angle QFA - \angle PDB = 180° - w - v = 90°.$$

I den retvinklede ΔPFQ er så

$$PQ^2 = PF^2 + FQ^2 = PD^2 + QE^2 \ .$$

e.

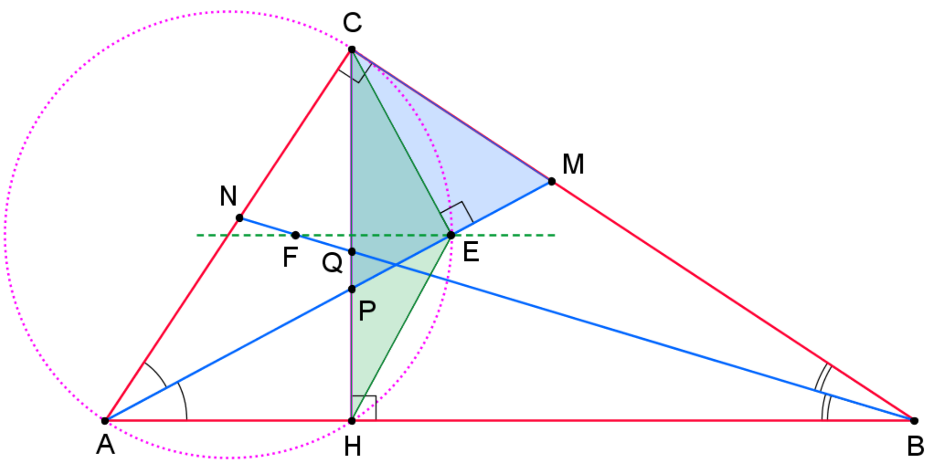
1. metode.

I ΔAMC og ΔAPH er

$$\angle CMA = 90° - \tfrac{1}{2}A = \angle APH = \angle CPM \ .$$

Så er ΔCPM ligebenet og $CE \perp PM$. Da $\angle CEA$ og $\angle CHA$ er rette, er $\square CEHA$ indskrivelig, og lige store periferivinkler i den omskrevne cirkel giver, at

$$\angle ECH = \angle EAH = \angle EAC = \angle EHC \ .$$

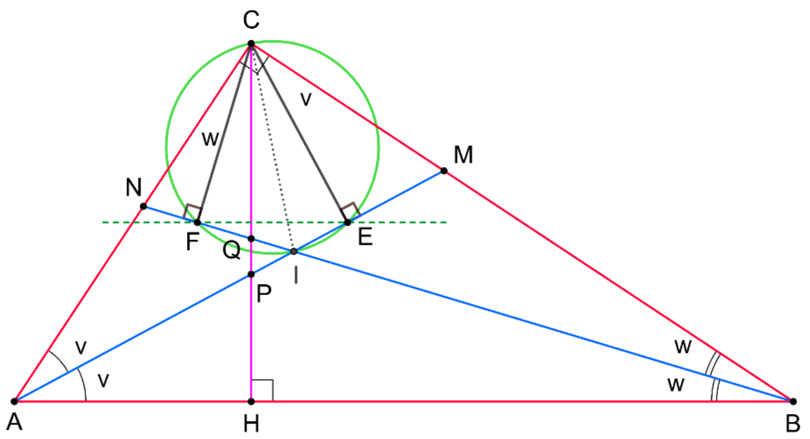


Dette medfører, at ΔCEH er ligebenet og $EC = EH$. Punktet E ligger altså på midtnormalen af CH. Analogt vises, at F ligger på midtnormalen af CH. Dermed er $EF \perp CH$, så $EF \parallel AB$.

Vi har som ekstra resultat opnået, at EF halverer højden CH.

2. metode (Jens-Søren Andersen, Esbjerg).

Lad I være skæringspunkt mellem BN og AM, dvs. I er centrum for den indskrevne cirkel. For nemheds skyld sætter vi $v = \tfrac{1}{2}A$ og $w = \tfrac{1}{2}B$, så $v + w = 45°$.



I ΔCNB er

$$\angle CNQ = \angle CNB = 90° - w.$$

I ΔHQB fås, at

$$\angle CQN = \angle HQB = 90° - w.$$

Dermed er $\angle CNQ = \angle CQN$, så ΔQCN er ligebenet. Da F er midtpunkt af NQ, er CF højde i ΔQCN.

I ΔNCF finder vi, at

$$\angle NCF = 90° - \angle CNF = 90° - \angle CNQ = 90° - (90° - w) = w.$$

På præcis samme måde ses, at $\angle MCE = v$. Så er

$$\angle FCE = \angle NCM - \angle NCF - \angle MCE = 90° - w - v = 90° - 45° = 45°.$$

Efter samme fremgangsmåde som oven for ses, at CE er højde i ΔPCM. Da altså $\angle CFI$ og $\angle CEI$ er rette, er $\square FCEI$ indskrivelig og lige store periferivinkler giver

$$\angle EFB = \angle EFI = \angle ECI = \angle MCI - \angle MCE = 45° - v = w = \angle FBA.$$

Altså er $EF \parallel AB$.

Besvarelser modtaget fra:

- Jens-Søren Andersen
- Walther Janous
- Jan Erik Pedersen.