Svar på opgave 390 (Maj 2022)

Opgave:

a. Bestem alle hele positive tal n, så $4n + 9$ og $9n + 4$ er kvadrattal.

b. Bestem alle par (x,y) af naturlige tal, så både $x^2 + 3y$ og $y^2 + 3x$ er kvadrattal.

c. Bestem det mindste kvadrattal m, så der findes naturlige tal a og b, så $m = 15a + 16b$ og $m = 16a - 15b$.

Besvarelse:

a.

1. metode.

Vi sætter

$$a^2 = 4n + 9 \quad , \quad b^2 = 9n + 4 \ .$$

Så er

$$9a^2 - 4b^2 = 9(4n + 9) - 4(9n + 4) = 81 - 16 = 65$$

$$\Leftrightarrow \quad (3a - 2b)(3a + 2b) = 65 \ .$$

Da $a > 3$ og $b > 2$, er $3a + 2b > 13$. Derfor er den eneste løsningsmulighed

$$3a + 2b = 65$$
$$3a - 2b = 1 \ .$$

hvoraf $(a,b) = (11,16)$, så

$$a^2 = 4n + 9 = 121 \quad \Leftrightarrow \quad n = 28 \ ,$$
$$b^2 = 9n + 4 = 256 \quad \Leftrightarrow \quad n = 28 \ .$$

Vi har altså, at

$$4 \cdot 28 + 9 = 11^2 \quad \text{og} \quad 9 \cdot 28 + 4 = 16^2 \ .$$

2. metode.

Da $4n + 9$ er ulige, findes et positivt helt tal t, så

$$4n + 9 = (2t + 3)^2 \ .$$

Altså er

$$4n + 9 = 4t^2 + 12t + 9 \quad \Leftrightarrow \quad n = t^2 + 3t \ .$$

Da $9n + 4$ er et kvadrattal, er også $4(9n + 4)$ et kvadrattal. Der findes derfor et positivt helt tal w, så

$$w^2 = 4(9n + 4) = 4(9t^2 + 27t + 4) = 36t^2 + 108t + 16 = (6t + 9)^2 - 65 \ .$$

Altså er

$$65 = (6t + 9)^2 - w^2 = (6t + 9 - w)(6t + 9 + w) \ .$$

Heraf fås

$$\begin{aligned} 6t + 9 + w &= 65 \\ 6t + 9 - w &= 1 \end{aligned}$$

hvilket giver $t = 4$ og dermed $n = t^2 + 3t = 28$.

Generalisation.

Betragt ligningssystemet

$$u^2n + v^2 = a^2 \quad , \quad v^2n + u^2 = b^2 \ ,$$

hvor $u > v > 0$. Hvis $(u,v) = (3,2)$ fås den oprindelige opgave.
Multiplikation med v^2 og u^2 giver

$$\begin{aligned} u^2v^2n + v^4 &= a^2v^2 \\ u^2v^2n + u^4 &= b^2u^2 \ , \end{aligned}$$

hvoraf ved subtraktion

$$u^4 - v^4 = u^2b^2 - v^2a^2 \quad \Leftrightarrow \quad (u^2 - v^2)(u^2 + v^2) = (ub - va)(ub + va) \ .$$

Vi ser på to tilfælde.

I. $ub - va = u^2 - v^2 \ , \ ub + va = u^2 + v^2$.

Ved addition fås

$$2ub = 2u^2 \quad \Leftrightarrow \quad b = u$$

og dermed $n = 0$.

II. $ub - va = 1 \ , \ ub + va = u^4 - v^4$.

Ved addition og subtraktion fås

$$\begin{aligned} 2ub &= u^4 - v^4 + 1 \\ 2va &= u^4 - v^4 - 1 \ , \end{aligned}$$

hvoraf

$$n = \frac{a^2 - v^2}{u^2} = \frac{\left(\frac{u^4 - v^4 - 1}{2v}\right)^2 - v^2}{u^2} = \frac{(u^4 - v^4 - 1)^2 - 4v^4}{4u^2v^2}$$

Når $u = v + 1$ (som i opgaven), er dette tal helt, fordi

$$n = \frac{((v+1)^4 - v^4 - 1)^2 - 4v^4}{4v^2(v+1)^2}$$

efter en del hidsig algebra kan omskrives til

$$n = 4(v^2 + v + 1) \ .$$

Dette giver

$$a^2 = u^2 n + v^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = (v+1)^2 n + v^2$$
$$= (v+1)^2 \cdot 4(v^2 + v + 1) + v^2 = (2v^2 + 3v + 2)^2$$

og

$$b^2 = v^2 n + u^2 = v^2 \cdot 4(v^2 + v + 1) + (v+1)^2 = (2v^2 + v + 1)^2 \ ,$$

så ligningssystemet ser sådan ud

$$\begin{aligned} (v+1)^2 n + v^2 &= (2v^2 + 3v + 2)^2 \\ v^2 n + (v+1)^2 &= (2v^2 + v + 1)^2 \ . \end{aligned}$$

Hvis $v = 2$ fås det oprindelige system

$$\begin{aligned} 4n + 9 &= 11^2 \\ 9n + 4 &= 16^2 \end{aligned}$$

Med løsningen $n = 28$. Hvis $v = 3$ skal vi løse systemet

$$\begin{aligned} 16n + 9 &= 29^2 \\ 9n + 16 &= 22^2 \ , \end{aligned}$$

hvilket giver

$$n = 4(v^2 + v + 1) = 4(9 + 3 + 1) = 52 \ .$$

b.

1. metode.

Hvis $x^2 + 3y = p^2$, er $p > x$, så vi kan skrive, at

$$x^2 + 3y = (x + m)^2$$

for et passende positivt helt tal m. På samme måde er

$$y^2 + 3x = (y + n)^2$$

for et positivt helt tal n. Vi får ved udregning, at

$$\begin{aligned} x^2 + 3y = x^2 + 2xm + m^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 3y = 2xm + m^2 \ , \\ y^2 + 3x = y^2 + 2yn + n^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 3x = 2yn + n^2 \ . \end{aligned}$$

Dette ligningssystem af første grad løses, og vi får

$$x = \frac{2nm^2 + 3n^2}{9 - 4mn} \ , \ y = \frac{2mn^2 + 3m^2}{9 - 4mn} \ .$$

Da x og y er positive, må $9 - 4mn \geq 0$, hvilket giver mulighederne $mn = 1$ eller $mn = 2$.
Hvis $mn = 1$, er $m = n = 1$, så vi får $x = 1$ og $y = 1$.
Hvis $mn = 2$, er $(m,n) = (1,2)$ eller $(m,n) = (2,1)$. I det første tilfælde får vi $(x,y) = (16,11)$, i det andet tilfælde er $(x,y) = (11,16)$.

Vi ser, at

$$1^2 + 3 \cdot 1 = 2^2 \quad , \quad 16^2 + 3 \cdot 11 = 17^2 \quad , \quad 11^2 + 3 \cdot 16 = 13^2 \; .$$

2. metode (Jens-Søren Andersen, Esbjerg).

Vi sætter

$$x^2 + 3y = a^2 \quad \text{og} \quad y^2 + 3x = b^2 \; ,$$

og forudsætter, at $x \le y$. Så får vi

$$(y + 2)^2 = y^2 + 4y + 4 > y^2 + 3y \ge y^2 + 3x > y^2 \; .$$

Så er $y^2 + 3x = b^2$ et kvadrattal, der ligger strengt mellem y^2 og $(y + 2)^2$. Dermed er

$$y^2 + 3x = (y + 1)^2 \quad \text{eller} \quad 3x = 2y + 1 \; .$$

At $y^2 + 3x$ er et kvadrattal er dermed ensbetydende med, at $3x = 2y + 1$. Da $3x = 2y + 1$ er ulige, er x ulige, så vi kan finde et naturligt tal n, så $x = 2n - 1$. Dermed er

$$y = \frac{3x-1}{2} = \frac{3(2n-1)-1}{2} = 3n - 2.$$

Omvendt er $(x,y) = (2n - 1 , 3n - 2)$ for ethvert naturligt tal n løsninger til $3x = 2y + 1$ og $y \ge x$.

Lad os derefter se på udtrykket $x^2 + 3y$. Vi får for det fundne par (x,y), at

$$x^2 + 3y = (2n - 1)^2 + 3(3n - 2) = 4n^2 + 5n + 5.$$

For $n = 1$ er $x^2 + 3y$ et kvadrattal. For $n > 1$ er

$$(2n)^2 < 4n^2 + 5n - 5 < 4n^2 + 8n + 4 = (2n + 2)^2 \; ,$$

så den eneste mulighed for, at $4n^2 + 5n - 5$ er et kvadrattal, er at

$$4n^2 + 5n - 5 = (2n + 1)^2 \; ,$$

hvilket giver $n = 6$. At $x^2 + 3y$ og $y^2 + 3x$ begge er kvadrattal er altså ensbetydende med, at $n = 1$ eller $n = 6$. Disse værdier giver:

$$n = 1 : \; (x,y) = (1,1) \quad , \quad n = 6 : (x,y) = (11,16) \; , (16,11) \; .$$

3. metode (Roger Bengtsson, Lund).

Vi kan af symmetrigrunde gå ud fra, at $y \le x$. Så er

$$x^2 \le x^2 + 3y \le x^2 + 3x < x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 \; .$$

Da $x^2 + 3y$ skal være et kvadrattal, har vi to tilfælde.

I. $x^2 + 3y = x^2$. Så er $y = 0$, som ikke er et naturligt tal. Medtages alligevel $y = 0$, får vi $x = 3k^2$, så løsninger er $(x,y) = (3k^2,0)$.

II. $x^2 + 3y = (x + 1)^2$. Så er

$$x^2 + 3y = (x + 1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3y = 2x + 1 \; .$$

Dette medfører, at

$$(2x + 1)^2 = 9y^2 \le 9y^2 + 27x = (2x + 1)^2 + 27x$$

$$= 4x^2 + 31x + 1 < 4x^2 + 32x + 64 = (2x + 8)^2 \; .$$

Tallet $(2x + 1)^2 + 27x$ ligger mellem kvadrattallene $(2x + 1)^2$ og $(2x + 8)^2$. Desuden er

$$(2x + 1)^2 + 27x = 9y^2 + 27x = 3^2(y^2 + 3x) ,$$

og da $y^2 + 3x$ skal være et kvadrattal, er også $(2x + 1)^2 + 27x$ et kvadrattal. Vi har derfor mulighederne

$$(2x + 1)^2 + 27x = (2x + k)^2 ,$$

hvor $k = 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Kun $k = 4$ og $k = 7$ giver hele løsninger. Vi får

$$(2x + 1)^2 + 27x = (2x + 4)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \text{ og } y = \tfrac{1}{3}(2x+1) = 1 ,$$

$$(2x + 1)^2 + 27x = (2x + 7)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 16 \text{ og } y = \tfrac{1}{3}(2x+1) = 11 .$$

Kontrol giver, at $(x,y) = (1,1), (16,11), (11,16)$ er løsninger.

4.metode (Con Amore Problemgruppe, Birkerød).

Lad (x,y) være et par af naturlige tal, der opfylder betingelsen. På grund af symmetrien forudsætter vi, at $x \geq y$. Lad a og b være naturlige tal, for hvilke

$$x^2 + 3y = a^2 \quad \text{og} \quad y^2 + 3x = b^2 . \tag{1}$$

Det er klart, at $x < a$, og vi finder, at

$$x^2 < a^2 = x^2 + 3y \leq x^2 + 3x < (x + 2)^2 .$$

Følgelig må $a = x + 1$. Da derfor $x = a - 1$ får vi ved indsættelse i den første ligning i (1):

$$3y = a^2 - x^2 = a^2 - (a - 1)^2 = 2a - 1 . \tag{2}$$

Ved hjælp af dette sammen med (2) får vi ved at indsætte i den anden ligning i (1), at

$$(3b)^2 = 9b^2 = 9y^2 + 27x = (3y)^2 + 27x = (2a - 1)^2 + 27(a - 1) = 4a^2 + 23a - 26 .$$

Heraf fås

$$4a^2 + 23a - (26 + (3b)^2) = 0 . \tag{3}$$

Denne andengradsligning i a har diskriminanten

$$d = 23^2 + 16(26 + (3b)^2) = 945 + (12b)^2 ,$$

som nødvendigvis må være et kvadrattal c^2, hvor c er et ulige naturligt tal, dvs.

$$c^2 = 945 + (12b)^2 \quad \Leftrightarrow \quad (c + 12b)(c - 12b) = 945 = 3^3 \cdot 5 \cdot 7 .$$

Forskellen mellem de to faktorer på venstre side af lighedstegnet er $24b \geq 14$, skal b og c opfylde et af ligningssystemerne i skemaet herunder.

$c + 12b$	945	315	189	135	105	63
$c - 12b$	1	3	5	7	9	15

Ved subtraktion ses, at b skal opfylde en af de seks ligninger

$$24b = 944 \;,\; 24b = 312 \;,\; 24b = 184 \;,\; 24b = 128 \;,\; 24b = 96 \;,\; 24b = 48 ,$$

hvoraf vi får, at de eneste muligheder er

$$b = 13 \;,\; b = 4 \;,\; b = 2 .$$

De andengradsligninger (3), der hører til disse værdier af b er

$$4a^2 + 23a - 1547 = 0 \quad , \quad 4a^2 + 23a - 170 = 0 \quad , \quad 4a^2 + 23a - 62 = 0 \ ,$$

hvis positive løsninger er henholdsvis

$$a = 17 \ , \ a = \tfrac{17}{4} \ , \ a = 2 \ .$$

Kun $a = 2$ og $a = 17$ kan bruges. De hertil hørende par (x,y) er (16,11), (11,16) og (1,1), som alle ses at være løsninger til opgaven.

Bemærkning.

Læserne/løserne husker naturligvis, at en lignende opgave tidligere har været stillet i Opgavehjørnet, idet opgave 195 (december 2002) lød sådan:

Find alle par (a,b) af hele tal, således at
$a^2 + 4b$ og $b^2 + 4a$ begge er kvadrattal.

Det viser sig, at løsningerne er

$$(a,b) : (k^2,0) \ , \ (0,k^2) \ , (k,1 - k) \ , (1 - k,k) \ , (-6,-5) \ , (-5,-6) \ , (-4,-4) \ .$$

Opgaven kan findes i den lille bog *Opgavehjørnet 1998-2003*, udsendt på eget forlag i 2008.

c. (Asger Olesen, Tønder).

Vi har, at

$$15a + 16b = 16a - 15b \quad \Leftrightarrow \quad a = 31b \ .$$

Så er

$$m = 15a + 16b = 15 \cdot 31b + 16b = 481b = 13 \cdot 37b \ .$$

Heraf ses, at det minimale valg af b er

$$b = 13 \cdot 37 = 481 \ ,$$

og at $a = 31b = 14911$, så

$$m = 481b = 481^2 = 231361 \ .$$

Altså er

$$15a + 16b = 15 \cdot 14911 + 16 \cdot 481 = 481^2$$
$$16a - 15b = 16 \cdot 14911 - 15 \cdot 481 = 481^2 \ .$$

Besvarelser modtaget fra:

- Jens-Søren Andersen
- Roger Bengtsson
- Hans Benner
- Walther Janous
- Hans Mortensen
- Asger Olesen
- Jan Erik Pedersen
- Palle Bak Petersen
- Con Amore Problemgruppe.