Svar på opgave 388 (Marts 2022)

Opgave:

Lidt trekanttrigonometri er altid velkomment.

Vis, at der i enhver trekant gælder nedenstående formler, hvor man dog i opgave **d** må forudsætte, at trekanten ikke er retvinklet.

a. $\dfrac{\cos A}{\sin B \cdot \sin C} + \dfrac{\cos B}{\sin C \cdot \sin A} + \dfrac{\cos C}{\sin A \cdot \sin B} = 2$

b. $\dfrac{\sin B}{\sin\left(C + \frac{A}{2}\right)} + \dfrac{\sin C}{\sin\left(B + \frac{A}{2}\right)} = 2\cos\frac{A}{2}$

c. $\sin A \cdot \cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \cos A \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos A \cdot \cos B = \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$

d. $\dfrac{\cot A + \cot B}{\tan A + \tan B} + \dfrac{\cot B + \cot C}{\tan B + \tan C} + \dfrac{\cot C + \cot A}{\tan C + \tan A} = 1$.

Besvarelse:

a.

1. metode.

Vi får, at

$$k = \frac{\cos A}{\sin B \cdot \sin C} + \frac{\cos B}{\sin C \cdot \sin A} + \frac{\cos C}{\sin A \cdot \sin B}$$

$$= \frac{\cos(180° - (B + C))}{\sin B \cdot \sin C} + \frac{\cos(180° - (A + C))}{\sin C \cdot \sin A} + \frac{\cos(180° - (A + B))}{\sin A \cdot \sin B}$$

$$= -\frac{\cos(B + C)}{\sin B \cdot \sin C} - \frac{\cos(C + A)}{\sin C \cdot \sin A} - \frac{\cos(A + B)}{\sin A \cdot \sin B}$$

$$= \frac{\sin B \cdot \sin C - \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C} + \frac{\sin C \cdot \sin A - \cos C \cdot \cos A}{\sin C \cdot \sin A} + \frac{\sin A \cdot \sin B - \cos A \cdot \cos B}{\sin A \cdot \sin B}$$

$$= 1 - \frac{\cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C} + 1 - \frac{\cos C \cdot \cos A}{\sin C \cdot \sin A} + 1 - \frac{\cos A \cdot \cos B}{\sin A \cdot \sin B}$$

$$= 3 - (\cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A + \cot A \cdot \cot B)$$

$$= 3 - \frac{1}{\tan B \cdot \tan C} - \frac{1}{\tan C \cdot \tan A} - \frac{1}{\tan A \cdot \tan B} = 3 - \frac{\tan A + \tan B + \tan C}{\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C} \quad .$$

Vi må her forudsætte, at trekanten ikke er retvinklet. Efter additionsformlen for tangens får vi

$$\tan C = \tan(180° - (A + B)) = -\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{\tan A \cdot \tan B - 1} \ ,$$

hvoraf

$$\tan C \cdot (\tan A \cdot \tan B - 1) = \tan A + \tan B$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C - \tan C = \tan A + \tan B$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C = \tan A + \tan B + \tan C$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\tan A + \tan B + \tan C}{\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C} = 1.$$

Dermed er endelig

$$k = 3 - 1 = 2 \ .$$

Hvis trekanten er retvinklet, er

$$\cos A = \sin B \quad , \quad \cos B = \sin A \quad , \quad \sin C = 1 \quad , \quad \cos C = 0,$$

så

$$k = \frac{\sin B}{\sin B \cdot 1} + \frac{\sin A}{1 \cdot \sin A} + \frac{0}{\sin A \cdot \sin B} = 2 \ .$$

2. metode.

Vi får, at

$$k = \frac{\cos A}{\sin B \cdot \sin C} + \frac{\cos B}{\sin C \cdot \sin A} + \frac{\cos C}{\sin A \cdot \sin B}$$

$$= \frac{\sin A \cdot \cos A}{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C} + \frac{\sin B \cdot \cos B}{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C} + \frac{\sin C \cdot \cos C}{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}$$

$$= \frac{\sin 2A + \sin 2B + 2\sin C \cdot \cos C}{2\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C} \ .$$

Vi ser på tælleren t og benytter

$$\sin x + \sin y = 2\sin\tfrac{x+y}{2} \cdot \cos\tfrac{x-y}{2}$$

og får

$$t = \sin 2A + \sin 2B + 2\sin C \cdot \cos C = 2\sin(A + B) \cdot \cos(A - B) + 2\sin C \cdot \cos C$$

$$= 2\sin(180° - C) \cdot \cos(A - B) + 2\sin C \cdot \cos(180° - (A + B))$$

$$= 2\sin C \cdot \cos(A - B) - 2\sin C \cdot \cos(A + B))$$

$$= 2\sin C \cdot (\cos(A - B) - \cos(A + B)) \ .$$

Nu er

$$\cos x - \cos y = -2\sin\tfrac{x+y}{2}\sin\tfrac{x-y}{2} \quad ,$$

så vi får

$$t = 2\sin C \cdot (-2)\sin\tfrac{A-B+A+B}{2} \cdot \sin\tfrac{A-B-A-B}{2}$$

$$= -4\sin C \cdot \sin A \cdot \sin(-B) = 4\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \ .$$

Dermed er

$$k = \frac{4\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}{2\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C} = 2\ .$$

Vi har som bonus fået den i sig selv smukke formel for trekantens vinkler:

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C\ .$$

3. metode.

Idet R er radius i trekantens omskrevne cirkel, omskrives den ønskede formel således

$$\frac{\cos A}{2R\cdot\sin B\cdot 2R\cdot\sin C} + \frac{\cos B}{2R\cdot\sin C\cdot 2R\cdot\sin A} + \frac{\cos C}{2R\cdot\sin A\cdot 2R\cdot\sin B} = \frac{2}{4R^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\cos A}{bc} + \frac{\cos B}{ac} + \frac{\cos C}{ab} = \frac{1}{2R^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{b^2+c^2-a^2}{2b^2c^2} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2a^2c^2} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2a^2b^2} = \frac{1}{2R^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-(a^4+b^4+c^4)}{a^2b^2c^2} = \frac{1}{R^2}\ . \qquad (1)$$

Idet trekantens areal er T, er det kendt at

$$4RT = abc \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{R} = \frac{4T}{abc} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{R^2} = \frac{16T^2}{a^2b^2c^2}\ ,$$

så (1) er ensbetydende med, at

$$2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4) = 16T^2\ .$$

Idet $2s$ er trekantens omkreds, giver Herons formel

$$16T^2 = 2s\cdot(2s - 2a)\cdot(2s - 2b)\cdot(2s - 2c) = (a + b + c)(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)\ .$$

Ved trælse men elementære algebraiske omformninger kan dette reduceres til

$$2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4)\ ,$$

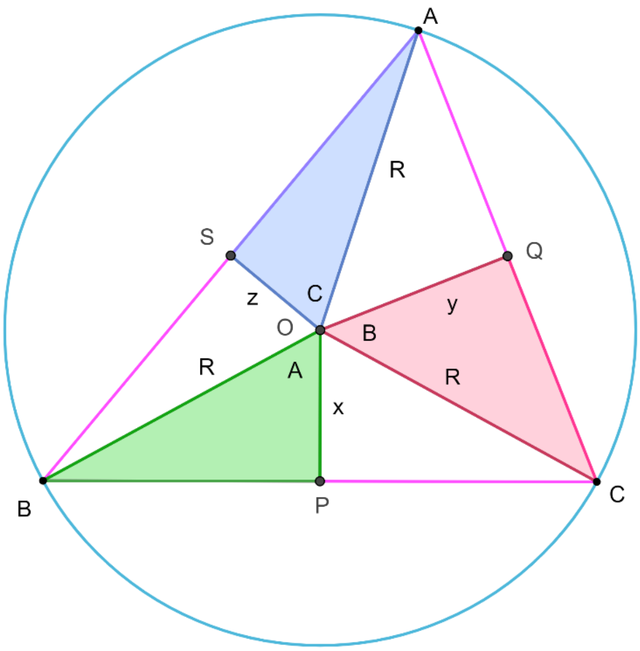
og dermed er det ønskede vist.

4. metode.

Som i 3. metode får vi, at venstre side kan omskrives til

$$\frac{\cos A}{\sin B\cdot\sin C} + \frac{\cos B}{\sin C\cdot\sin A} + \frac{\cos C}{\sin A\cdot\sin B} = \frac{4R^2\cos A}{bc} + \frac{4R^2\cos B}{ca} + \frac{4R^2\cos C}{ab}$$

$$= \frac{4R^2(a\cos A + b\cos B + c\cos C)}{abc}. \qquad (2)$$



På figuren er O centrum for den omskrevne cirkel i ΔABC og P, Q og S er projektioner- ne af O på siderne, dvs. sidemidtpunkterne. Længderne af OP, OQ og OS er x, y og z.
Vi ser, at

$$\angle BOP = \angle BAC = A \;,\; \angle COQ = \angle CBA = B \;,\; \angle AOS = \angle ACB = C \;,$$

så vi i ΔBOP, ΔCOQ og ΔAOS får

$$\cos A = \tfrac{x}{R} \;,\; \cos B = \tfrac{y}{R} \;,\; \cos C = \tfrac{z}{R} \;.$$

Altså er

$$a\cos A + b\cos B + c\cos C = \frac{ax+by+cz}{R} \;. \tag{3}$$

For arealer gælder

$$[\Delta BOP] = \tfrac{xa}{4} \;,\quad [\Delta COQ] = \tfrac{yb}{4} \;,\quad [\Delta AOS] = \tfrac{zc}{4} \;,$$

hvoraf

$$T = 2([\Delta BOP] + [\Delta COQ] + [\Delta AOS]) = \frac{ax+by+cz}{2} \;. \tag{4}$$

Af (3) og (4) fås sammen med formlen $4RT = abc$, at

$$a\cos A + b\cos B + c\cos C = \frac{2T}{R} = \frac{4RT}{2R^2} = \frac{abc}{2R^2} \;.$$

Af (2) får vi så endelig

$$\frac{4R^2(a\cos A + b\cos B + c\cos C)}{abc} = \frac{4R^2}{abc}\cdot\frac{abc}{2R^2} = 2.$$

5. metode (Jens-Søren Andersen, Esbjerg).

Vi omskriver den ønskede formel til

$$\sin A\cdot\cos A+\sin B\cdot\cos B+\sin C\cdot\cos C=2\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C\ ,$$

og idet

$$\sin C=\sin(180°-(A+B))=\sin(A+B)$$

og

$$\cos C=\cos(180°-(A+B))=-\cos(A+B)$$

får vi

$$\sin A\cdot\cos A+\sin B\cdot\cos B+\sin C\cdot\cos C$$

$$=\sin A\cdot\cos A+\sin B\cdot\cos B-\sin(A+B)\cdot\cos(A+B)$$

$$=\sin A\cdot\cos A+\sin B\cdot\cos B-(\sin A\cdot\cos B+\cos A\cdot\sin B)\cdot(\cos A\cdot\cos B-\sin A\cdot\sin B)$$

$$=\sin A\cdot\cos A\cdot(1-\cos^2B+\sin^2B)+\sin B\cdot\cos B\cdot(1-\cos^2A+\sin^2A)$$

$$=2\sin A\cdot\cos A\cdot\sin^2B+2\sin B\cdot\cos B\cdot\sin^2A$$

$$=2\sin A\cdot\sin B\cdot(\sin B\cdot\cos A+\cos B\cdot\sin A)$$

$$=2\sin A\cdot\sin B\cdot\sin(A+B)=2\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C\ .$$

6. metode (Hans Mortensen, Skive).

Som oven for er formlen ensbetydende med

$$\sin A\cdot\cos A+\sin B\cdot\cos B+\sin C\cdot\cos C=2\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$$

eller

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$$

På højre side er

$$2\sin A\cdot\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)\ ,$$

så højre side kan omskrives således:

$$4\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C=2\cos(A-B)\cdot\sin\mathrm{C}-2\cos(A+B)\cdot\sin\mathrm{C}$$

$$=\sin(C-(A-B))+\sin(C+(A-B))-(\sin(C-(A+B))+\sin(C+(A-B)))$$

$$=\sin(C-A+B)+\sin(C+A-B)-\sin(C-A-B)-\sin(C+A+B)$$

$$=\sin(180°-2\mathrm{A})+\sin(180°-2B)-\sin(2C-180°)-\sin 180°$$

$$=\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C\ .$$

Dermed er formlen bevist.

b.

1. metode.

Vi har, at

$$\left(C+\tfrac{A}{2}\right)+\left(B+\tfrac{A}{2}\right)=180°\ ,$$

så

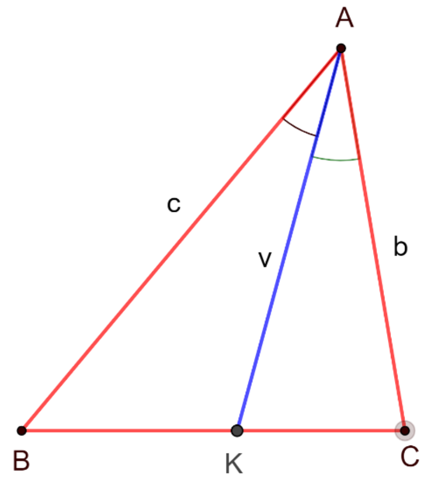
$$\sin\left(C+\tfrac{A}{2}\right)=\sin\left(B+\tfrac{A}{2}\right)\ .$$

Dermed er

$$\frac{\sin B}{\sin\left(C+\frac{A}{2}\right)}+\frac{\sin C}{\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)}=\frac{\sin B+\sin C}{\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)}=\frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cdot\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\left(B+\frac{180°-B-C}{2}\right)}$$

$$=\frac{2\sin\left(90°-\frac{A}{2}\right)\cdot\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\left(90°+\frac{B-C}{2}\right)}=\frac{2\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}=2\cos\frac{A}{2}\ .$$

2. metode (Hans Mortensen, Skive).



I ΔABC skærer vinkelhalveringslinjen fra A siden BC i K.
Så er

$$\angle BKA=180°-\frac{A}{2}-B=C+\frac{A}{2}$$

og

$$\angle AKC=180°-\frac{A}{2}-C=B+\frac{A}{2}\ ,$$

og hvis længden af vinkelhalveringslinjen er v giver sinusrelationen i ΔABK og ΔACK, at

$$\frac{\sin B}{\sin(C+\frac{A}{2})}=\frac{v}{c}\quad\text{og}\quad\frac{\sin C}{\sin(B+\frac{A}{2})}=\frac{v}{b}\ .$$

Heraf fås ved addition

$$\frac{\sin B}{\sin(C+\frac{A}{2})}+\frac{\sin C}{\sin(B+\frac{A}{2})}=\frac{v}{c}+\frac{v}{b}\ .$$

Nu er det kendt, at længden af vinkelhalveringslinjen er

$$v=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}\quad\text{eller}\quad 2\cos\frac{A}{2}=\frac{v(b+c)}{bc}\ .$$

Vi skal altså blot eftervise, at

$$\frac{v}{c}+\frac{v}{b}=\frac{v(b+c)}{bc},$$

og dette er indlysende.

c.

1. metode.

Vi har, at

$$\sin A\cdot\cos B\cdot\cos C+\sin B\cdot\cos A\cdot\cos C+\sin C\cdot\cos A\cdot\cos B$$

$$=\cos C\cdot(\sin A\cdot\cos B+\sin B\cdot\cos A)+\sin C\cdot\cos A\cdot\cos B$$

$$=\cos C\cdot\sin(A+B)+\sin C\cdot\cos A\cdot\cos B$$

$$=\sin C\cdot\cos C+\sin C\cdot\cos A\cdot\cos B$$

$$=\sin C\cdot(-\cos(A+B)+\cos A\cdot\cos B)=\sin C\cdot\sin A\cdot\sin B.$$

Ved det sidste lighedstegn har vi brugt, at

$$\cos(A+B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B \ .$$

2. metode.

Ved division med $\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$ fås, at formlen er ensbetydende med

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C \ ,$$

hvilket er sandt efter opgave **a**.

d.

Vi bemærker først, at

$$\frac{\cot x + \cot y}{\tan x + \tan y} = \frac{\cot x + \cot y}{\frac{1}{\cot x} + \frac{1}{\cot y}} = \frac{\cot x \cdot \cot y \cdot (\cot x + \cot y)}{\cot y + \cot x} = \cot x \cdot \cot y \ .$$

Altså er

$$\frac{\cot A + \cot B}{\tan A + \tan B} + \frac{\cot B + \cot C}{\tan B + \tan C} + \frac{\cot C + \cot A}{\tan C + \tan A}$$

$$= \cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A \ .$$

Ved hjælp af opgave **a** får vi endelig

$$\frac{\tan A + \tan B + \tan C}{\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\tan A \cdot \tan B} + \frac{1}{\tan B \cdot \tan C} + \frac{1}{\tan C \cdot \tan A} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1 \ .$$

Bemærkning.

Vi viser, at der i ΔABC gælder

$$\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \le \frac{\sqrt{3}}{8} \ .$$

Funktionen $f(x) = \sin x$ er konkav i intervallet $]0°;180°[$, så Jensens ulighed giver, at

$$\tfrac{1}{3}(f(A) + f(b) + f(C)) \le f\left(\tfrac{A+B+C}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{3}(\sin A + \sin B + \sin C) \le \sin \tfrac{A+B+C}{3} = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

Uligheden mellem geometrisk og aritmetisk middeltal giver

$$\sqrt[3]{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C} \le \tfrac{1}{3}(\sin A + \sin B + \sin C) = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \le \tfrac{3\sqrt{3}}{8} \ .$$

Mange andre trigonometriske uligheder i trekanten kan findes i Jens Carstensen & Palle Bak Petersen: *Uligheder* (2003).

Besvarelser modtaget fra:

- Jens-Søren Andersen
- Hans Benner
- Walther Janous
- Hans Mortensen
- Jan Erik Pedersen
- Palle Bak Petersen