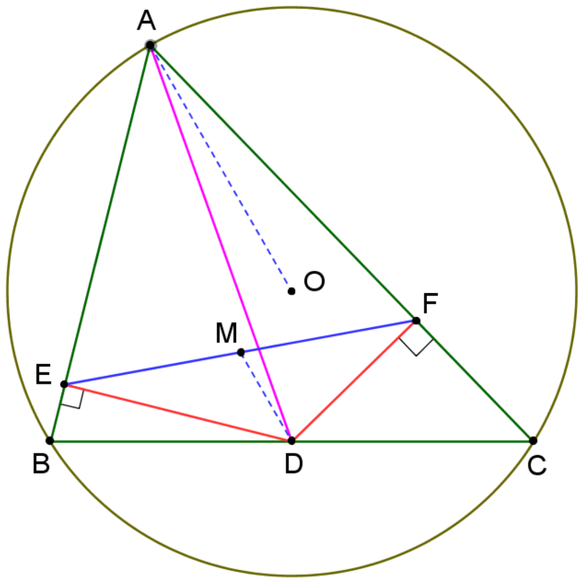
Svar på opgave 387 (Februar 2022)

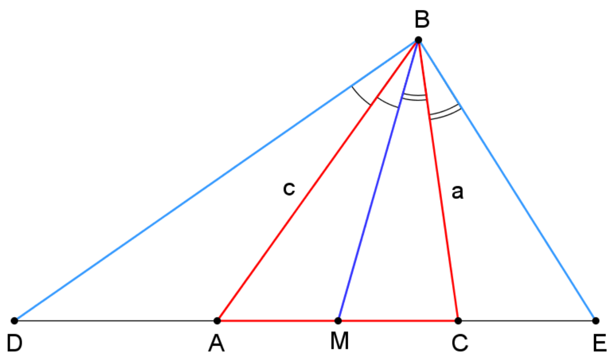
Opgave:

Et par mindre kendte sætninger om trekantens medianer.

a. I ΔABC er $AB \neq AC$. Medianen fra A er AD, og E og F er projektioner af D på AB og AC. Desuden er M midtpunkt af EF og O centrum for den omskrevne cirkel.
Vis, at $DM \parallel AO$.



b. I ΔABC er $\frac{BA}{BC} = \frac{c}{a} = k$ og M er midtpunkt af AC. Medianen BM spejles i AB og BC og spejlbillederne skærer AC i D og E.
Bestem forholdet $\frac{BD}{BE}$.



Besvarelse:

a.

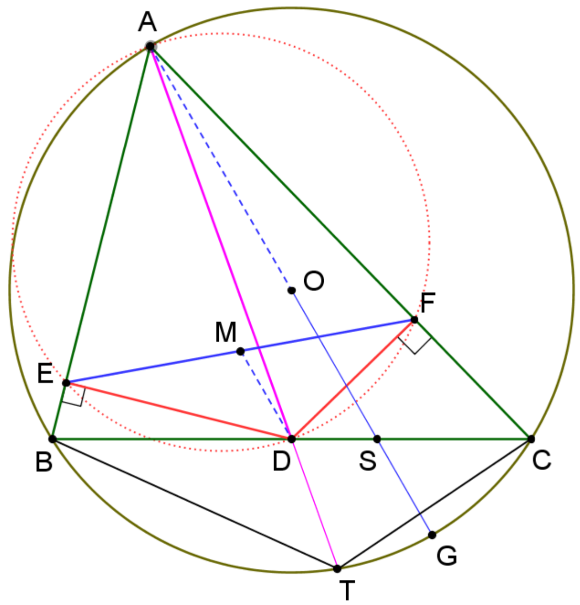
1. metode.

Lad AO skære BC og cirklen i S og G, og lad AD skære den i T. Lige store periferivinkler giver, at

$$\angle TBD = \angle TAC \ .$$

Da $\square AEDF$ er indskrivelig (den har to modstående rette vinkler), er

$$\angle TAC = \angle DAF = \angle DEF\ .$$



Altså er $\angle TBD = \angle DEF$.
Lige store periferivinkler i den omskrevne cirkel giver

$$\angle TCD = \angle TAB,$$

og i den omskrevne cirkel for $\square AEDF$ fås, at

$$\angle TAB = \angle DAE = \angle DFE.$$

Dermed er $\angle TCD = \angle DFE$, så ΔDEF og ΔTBC er ensvinklede. Dermed er

$$\frac{TB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}EF} = \frac{BD}{EM}\ .$$

Heraf følger, at ΔTBD og ΔDEM er ensvinklede.
Altså er

$$\angle EDM = \angle BTD\ ,$$

og i den omskrevne cirkel for ΔABC er

$$\angle BTD = \angle ACB,$$

så vi får, at $\angle EDM = \angle ACB.$ Dernæst er

$$\angle BDM = \angle BDE + \angle EDM = 90° - \angle EBD + \angle ACB = 90° - \angle ABC + \angle ACB. \qquad (1)$$

I den omskrevne cirkel for ΔABC er $\angle ABC\ og\ \angle OAC$ periferivinkler, der tilsammen spænder over halvcirklen ACG, så

$$\angle OAC + \angle ABC = 90° \quad \Leftrightarrow \quad \angle OAC = 90° - \angle ABC. \qquad (2)$$

Ved hjælp af (2) fås så i ΔASC, at

$$\angle ASB = 180° - \angle ASC = \angle SAC + \angle ACB$$
$$= \angle OAC + \angle ACB = 90° - \angle ABC + \angle ACB. \qquad (3)$$

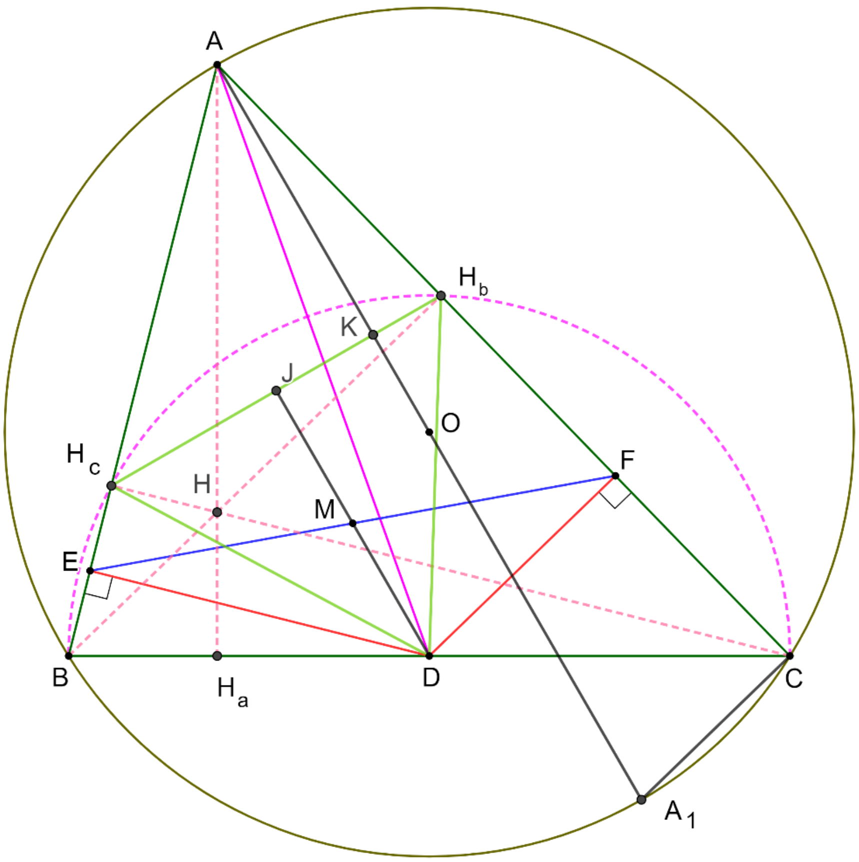
Af (1) og (3) følger, at

$$\angle ASB = \angle BDM\ ,$$

hvilket netop medfører, at AS $\parallel$ MD.

2. metode (Jens-Søren Andersen, Esbjerg).

Man kan vise, at Linjerne *AO* og *DM* er sammenfaldende netop hvis *A* er ret eller hvis *AB* = *AC*.



Antag, at dette ikke er tilfældet. Lad H_a, H_b og H_c være højdefodpunkter på BC, CA og AB. Desuden er J midtpunkt af H_bH_c, K er skæringspunktet mellem AO og H_bH_c og H er højdernes skæringspunkt.

Da $\overrightarrow{BC} = 2 \cdot \overrightarrow{BD}$, følger ved projektion på AB, at $\overrightarrow{BH_c} = 2 \cdot \overrightarrow{BE}$. Tilsvarende fås, at $\overrightarrow{CH_b} = 2 \cdot \overrightarrow{CF}$. Nu er $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{o}$, så vi får

$$2 \cdot \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF} = \left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BE}\right) + \left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF}\right) = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BH_c} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CH_b}$$

$$= \vec{o} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BH_c} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CH_b} = \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}\right) + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BH_c} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CH_b}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BH_c} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CH_b}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{DH_c} + \overrightarrow{DH_b}\right) = \overrightarrow{DJ} \,.$$

Vi slutter heraf, at D, M og J ligger på linje. Idet

$$\angle CH_bB = \angle BH_cC = 90°,$$

ligger H_b og H_c på en cirkel mede BC som diameter, dvs. med D som centrum. Dermed er DH_b = DH_c og DJ er midtnormal til H_bH_c. Specielt er $DJ \perp H_bH_c$. Det ønskede er vist, hvis $AK \perp H_bH_c$.

Lad os antage, at ΔABC er spidsvinklet. I ΔBAH_a fås

$$\angle BAH_a = 90° - B .$$

I ΔAHH_c er

$$\angle H_c AH = \angle BAH_a = 90° - B.$$

Da $\square H_cHH_bA$ er indskrivelig (den indeholder to rette vinkler), er

$$90° - B = \angle H_c AH = \angle H_c H_b H .$$

Altså er

$$\angle KH_b A = \angle HH_b A - \angle H_c H_b H = 90° - (90° - B) = B.$$

Hvis A_1 er det diametralt modsatte punkt af A på trekantens omskrevne cirkel, er ΔACA_1 retvinklet i C, så

$$\angle A_1 AC = \angle CAO = 90° - \angle AA_1 C = 90° - \angle ABC = 90° - B ,$$

Idet lige store periferivinkler giver

$$\angle ABC = \angle AA_1 C .$$

Da $\angle CAO = \angle H_b AK$, er dermed

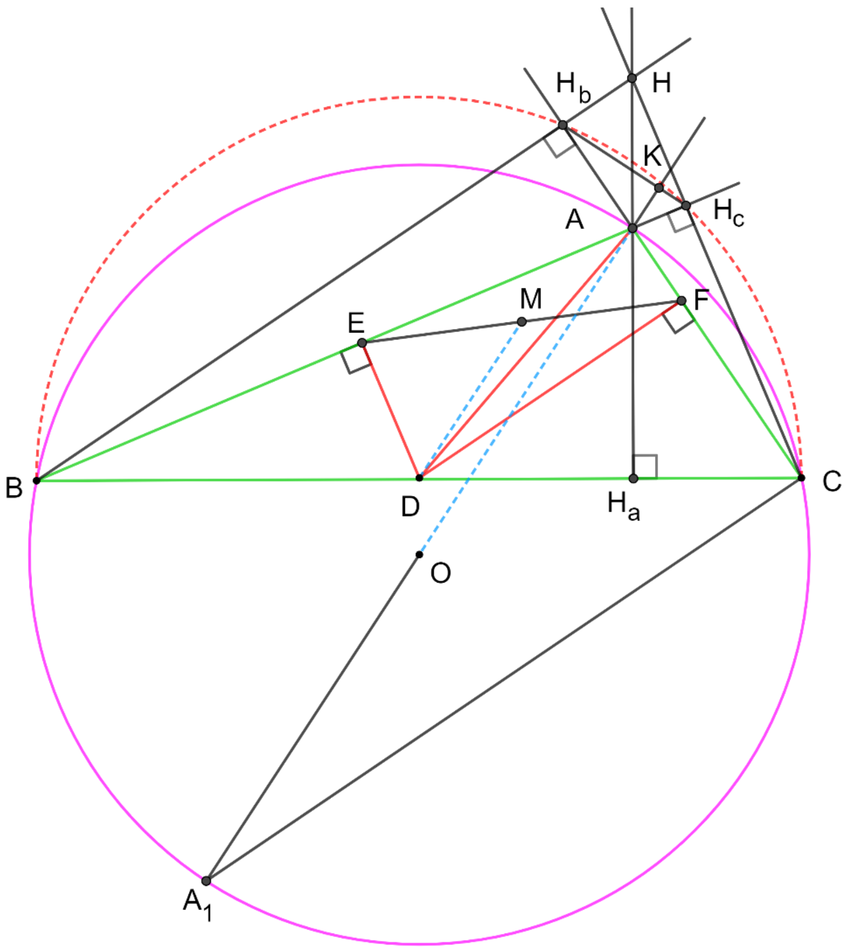
$$\angle H_b AK = 90° - B.$$

I ΔH_bAK er så

$$\angle AKH_b = 180° - \left(\angle H_b AK + \angle KH_b A\right) = 180° - (90° - B) + B = 90°.$$

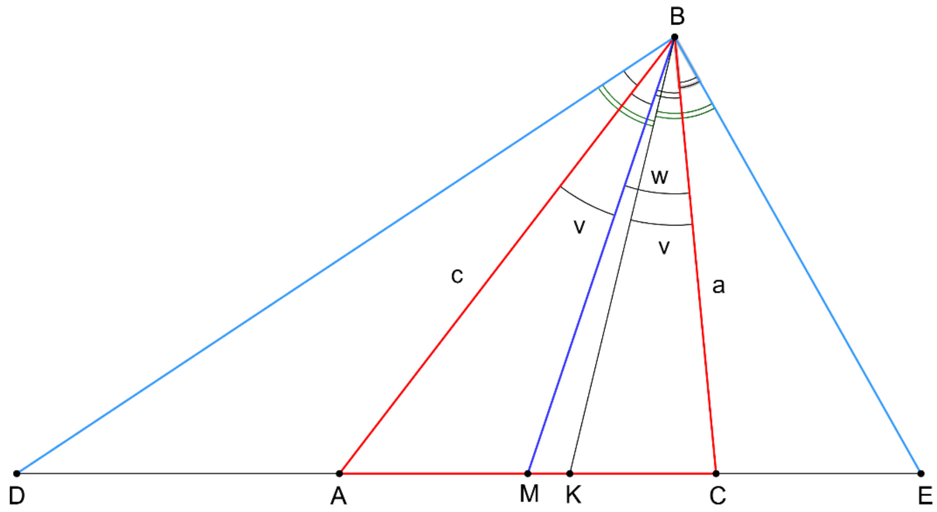
Dermed er $AK \perp H_b H_c$ som ønsket.

Antag så, at A er stump. Regningerne ovenfor udføres på samme måde, se figuren.



b.

Vi går ud fra, at ΔABC er spidsvinklet. Hvis B er stump, skal argumenterne ændres passende.



I ΔBDM er BA vinkelhalveringslinje, så

$$\frac{DB}{BM} = \frac{DA}{AM} \ ,$$

og i ΔBEM er BC vinkelhalveringslinje, så

$$\frac{BE}{BM} = \frac{CE}{CM} \ .$$

Ved division fås

$$\frac{DB}{BE} = \frac{DA \cdot CM}{AM \cdot CE} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{DB}{BE} = \frac{DA}{CE} \ . \tag{1}$$

Lad vinkelhalveringslinjen for $\angle DBE$ skære DE i K. Så er

$$\frac{BD}{BE} = \frac{DK}{KE} \ . \tag{2}$$

Af (1) og (2) fås

$$\frac{BD}{BE} = \frac{DK - DA}{KE - CE} = \frac{AK}{KC} \ . \tag{3}$$

Nu har vi

$$\angle DBK = \angle DBA + \angle ABM + \angle MBK = 2 \cdot \angle ABM + \angle MBK \tag{4}$$

og

$$\angle EBK = \angle EBC + \angle CBM - \angle MBK = 2 \cdot \angle CBM - \angle MBK \ . \tag{5}$$

Da $\angle DBK = \angle EBK$ fås af (4) og (5):

$$2 \cdot \angle ABM + \angle MBK = 2 \cdot \angle CBM - \angle MBK$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 \cdot \angle ABM = 2 \cdot \angle CBM - 2 \cdot \angle MBK \quad \Leftrightarrow \quad \angle ABM = \angle CBM - \angle MBK$$

$$\Leftrightarrow \quad \angle ABM = \angle CBK \ .$$

Vi sætter

$$v = \angle ABM = \angle CBK \quad , \quad w = \angle MBC \ .$$

Så er

$$\angle ABK = \angle ABM + \angle MBK = \angle CBK + \angle MBK = \angle MBC = w\,.$$

Ved hjælp af trekantarealer fås

$$\frac{AK}{KC} = \frac{[\Delta ABK]}{[\Delta CBK]} = \frac{\frac{1}{2}AB\cdot BK\cdot \sin\angle ABK}{\frac{1}{2}CB\cdot BK\cdot \sin\angle CBK} = \frac{AB\cdot \sin w}{CB\cdot \sin v}$$

$$= \frac{AB^2\cdot CB\cdot BM\cdot \sin w}{CB^2\cdot AB\cdot BM\cdot \sin v} = k^2\cdot\frac{2\cdot[\Delta CBM]}{2\cdot[\Delta ABM]} = k^2\,. \qquad (6)$$

Altså får vi af (3) og (6), at

$$\frac{BD}{BE} = k^2\,.$$

Opgaven udtrykker en smuk og måske ikke så velkendt egenskab ved trekantens medianer.

Bemærkning.

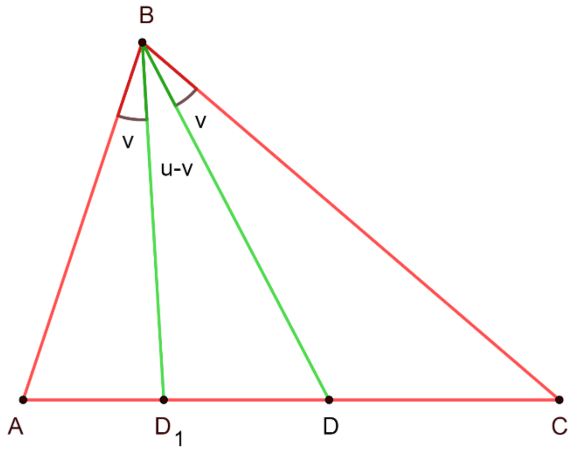
Jens-Søren Andersen, Esbjerg, sender følgende bemærk- ning. I ΔABC er D et punkt på linjen AC (D ligger ikke nødvendigvis på linjestykket AC). Vi sætter

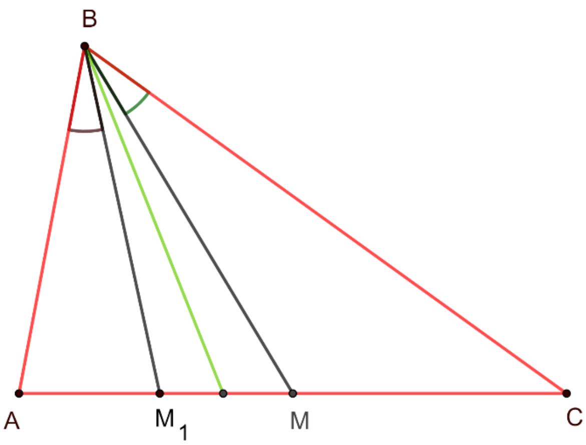
$$u = \angle ABD \quad , \quad v = \angle CBD.$$

Lad D_1 være det punkt på linjen AC, hvor

$$v = \angle ABD_1 \quad , \quad u = \angle CBD_1\,,$$

dvs. BD og BD_1 er *isogonale* linjer med hensyn til ΔABC.





Nu giver sinusrelationen i ΔABD og ΔBDC:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{\sin u}{\sin\angle BDA}$$

og

$$\frac{DC}{BC} = \frac{\sin v}{\sin\angle BDC} = \frac{\sin v}{\sin\angle BDA}\,.$$

Ved division får vi

$$\frac{AD}{DC}\cdot\frac{BC}{AB} = \frac{\sin u}{\sin v}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{AD}{DC} = \frac{\sin u}{\sin v}\cdot\frac{c}{a}\,. \qquad (7)$$

På samme måde er

$$\frac{AD_1}{D_1C} = \frac{\sin v}{\sin u}\cdot\frac{c}{a}\,. \qquad (8)$$

Af (7) og (8) fås

$$\frac{AD}{DC}\cdot\frac{AD_1}{D_1C}=\frac{c^2}{a^2}\ . \qquad (9)$$

Hvis $u = v$, er BD vinkelhalveringslinje for B og (7) udtrykker den kendte formel

$$\frac{AD}{DC}=\frac{c}{a}\ .$$

Hvis D er midtpunkt af AC, dvs. $D = M$, og BM og BM_1 er isogonaler, giver (9)

$$\frac{AM\cdot AM_1}{CM\cdot CM_1}=\frac{AM_1}{CM_1}=\frac{c^2}{a^2}.$$

Bemærkning.

Jens-Søren Andersen bemærker, at man ikke kan være sikker på, at spejl- billederne af medianen fra B i siderne BA og BC betragtet som halvlinjer skærer siden AC. Hvis fx vinklen B er 'for stor' sker dette ikke. Derfor bør opgaven mere korrekt for- muleres sådan:

I ΔABC er M midtpunkt af siden AC. Antag, at der findes punkter D og E på forlængel- sen af linjestykket AC ud over henholdsvis A og C, så $\angle DBA=\angle ABM$ og $\angle EBC=\angle CBM$. Lad $k = \frac{AB}{BC}=\frac{c}{a}$. Bestem $\frac{DB}{EB}$.

Besvarelser modtaget fra:

- Jens-Søren Andersen
- Walther Janous
- Jan Erik Pedersen