Svar på opgave 386 (Januar 2022)

Opgave:

Vis følgende trigonometriske identitet:

$$\frac{1}{\sin^4\frac{\pi}{14}}+\frac{1}{\sin^4\frac{3\pi}{14}}+\frac{1}{\sin^4\frac{5\pi}{14}}=416.$$

Besvarelse:

1. metode.

Vi sætter

$$a=\sin\tfrac{\pi}{14}=\cos\tfrac{6\pi}{14}=\cos\tfrac{3\pi}{7}\quad,\quad b=\sin\tfrac{3\pi}{14}=-\cos\tfrac{10\pi}{14}=-\cos\tfrac{5\pi}{7}\quad,$$

$$c=\sin\tfrac{5\pi}{14}=\cos\tfrac{2\pi}{14}=\cos\tfrac{\pi}{7}\ .$$

Efter det trigonometriske formelmaskineri gælder

$$\cos 7v = 64\cos^7 v - 112\cos^5 v + 56\cos^3 v - 7\cos v\ .$$

For $v=\frac{3\pi}{7}$ fås

$$-1=\cos 3\pi = 64\cos^7\tfrac{3\pi}{7}-112\cos^5\tfrac{3\pi}{7}+56\cos^3\tfrac{3\pi}{7}-7\cos\tfrac{3\pi}{7}$$

$$\Leftrightarrow\quad 64a^7 - 112a^5 + 56a^3 - 7a + 1 = 0\ .$$

For $v=\frac{5\pi}{7}$ fås

$$-1=\cos 5\pi = 64\cos^7\tfrac{5\pi}{7}-112\cos^5\tfrac{5\pi}{7}+56\cos^3\tfrac{5\pi}{7}-7\cos\tfrac{5\pi}{7}$$

$$\Leftrightarrow\quad 64(-b)^7 - 112(-b)^5 + 56(-b)^3 - 7(-b) + 1 = 0\ .$$

Endelig fås for $v=\frac{\pi}{7}$:

$$-1=\cos\pi = 64\cos^7\tfrac{\pi}{7}-112\cos^5\tfrac{\pi}{7}+56\cos^3\tfrac{\pi}{7}-7\cos\tfrac{\pi}{7}$$

$$\Leftrightarrow\quad 64c^7 - 112c^5 + 56c^3 - 7c + 1 = 0\ .$$

Nu er

$$64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x + 1 = (x+1)(8x^3 - 4x^2 - 4x + 1)^2\ , \tag{1}$$

så vi ser, at a, $-b$ og c er nulpunkter i polynomiet (1) og dermed i ligningen

$$8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0\quad\Leftrightarrow\quad x^3-\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{8}=0\ ,$$

og efter Vietas formler for rødderne i et polynomium er

$$a - b + c = \tfrac{1}{2}\quad,\quad -ab - bc + ac = -\tfrac{1}{2}\quad,\quad abc = \tfrac{1}{8}\ .$$

Så får vi

$$\tfrac{1}{4} = (a - b + c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + 2(-ab - bc + ac) = a^2 + b^2 + c^2 - 1 ,$$

hvoraf

$$a^2 + b^2 + c^2 = \tfrac{5}{4} .$$

Videre er

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4} &= (-ab - bc + ac)^2 = (ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2 + 2abc(-a + b - c)\\ &= (ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2 + 2\cdot\tfrac{1}{8}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) ,\end{aligned}$$

hvoraf

$$(ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2 = \tfrac{3}{8} .$$

Endelig er

$$\begin{aligned}\tfrac{9}{64} &= ((ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2)^2 = (ab)^4 + (bc)^4 + (ac)^4 + 2(abc)^2(a^2 + b^2 + c^2)\\ &= (ab)^4 + (bc)^4 + (ac)^4 + 2\cdot\tfrac{1}{64}\cdot\tfrac{5}{4} ,\end{aligned}$$

hvoraf

$$(ab)^4 + (bc)^4 + (ac)^4 = \tfrac{13}{128} .$$

Til slut er

$$\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} = \frac{(ab)^4 + (bc)^4 + (ac)^4}{(abc)^4} = \frac{\tfrac{13}{128}}{\left(\tfrac{1}{8}\right)^4} = 416.$$

2. metode **(Jens-Søren Andersen, Esbjerg).**

Vi sætter i den komplekse plan

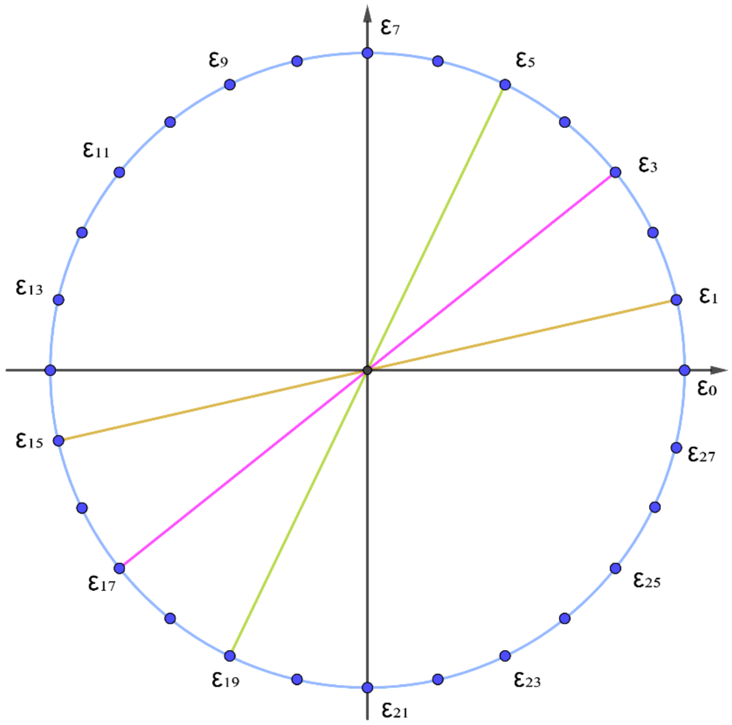
$$\varepsilon_k = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{14}} = \cos\tfrac{k\pi}{14} + \mathrm{i}\sin\tfrac{k\pi}{14} \quad , \quad k = 0,1,2,\ldots,27 .$$

Så har vi

$$\varepsilon_{14+k} = -\varepsilon_k$$

og

$$\varepsilon_k \cdot \varepsilon_{14-k} = \mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{14}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(14-k)\pi}{14}} = \mathrm{e}^{\frac{14\mathrm{i}\pi}{14}} = \mathrm{e}^{i\pi} = -1 . \tag{1}$$



For k = 1, 3, 5 sætter vi

$$x_k = \sin^2 \tfrac{k\pi}{14} ,$$

og desuden får vi brug for det lidt kryptiske udtryk

$$a_k = -\varepsilon_k{}^2 - \varepsilon_{14-k}{}^2 = -\left(\varepsilon_k + \varepsilon_{14-k}\right)^2 + 2\varepsilon_k \cdot \varepsilon_{14-k}$$

$$= -\left(2\mathrm{i} \cdot \mathrm{Im}\,\varepsilon_k\right)^2 - 2 = -4\mathrm{i}^2 \cdot \left(\mathrm{Im}\,\varepsilon_k\right)^2 - 2 = 4\sin^2 \tfrac{k\pi}{14} - 2 = 4x_k - 2 . \qquad (2)$$

Nu er

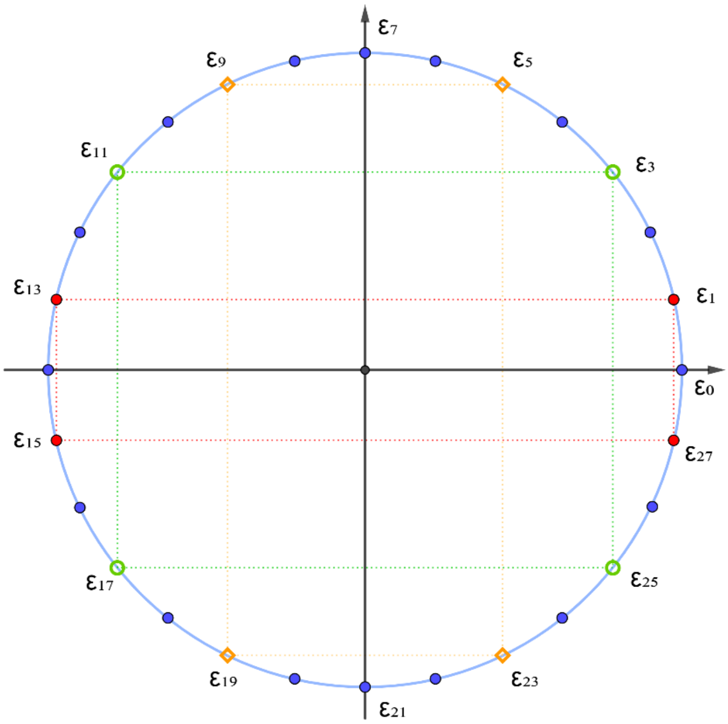
$$x^{28} - 1 = (x^{14} - 1)(x^{14} + 1) = (x^{14} - 1)(x^2 + 1)(x^{12} - x^{10} + x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1)$$
$$= (x^{14} - 1)(x^2 + 1)p(x) .$$

Polynomiet $x^{28} - 1$ har de 28 enhedsrødder ε_k for k = 0, 1, 2,…, 27. Disse tal fordeler sig således:

Tallene ε_k er rødder i $x^{14} - 1$ for k = 0, 2, 4, 6, . . ., 24, 26 ,
Tallene ε_k er rødder i $x^2 + 1$ for k = 7, 21 ,
Tallene ε_k er rødder i $p(x)$ for k = 1, 3, 5, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 23, 25, 27.

Rødderne i $p(x)$ kan deles i grupperne

$$\{\varepsilon_1, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{15}, \varepsilon_{27}\} \ , \ \{\varepsilon_3, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{17}, \varepsilon_{25}\} \ , \ \{\varepsilon_5, \varepsilon_9, \varepsilon_{19}, \varepsilon_{23}\} .$$



For grupperne får vi følgende udregninger:

$$(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_{13})(x-\varepsilon_{15})(x-\varepsilon_{27}) = (x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_{13})(x+\varepsilon_1)(x+\varepsilon_{13})$$

$$= (x^2-\varepsilon_1{}^2)(x^2-\varepsilon_{13}{}^2) = x^4 + (-\varepsilon_1{}^2-\varepsilon_{13}{}^2)x^2 + \varepsilon_1{}^2\varepsilon_{13}{}^2 = x^4 + a_1x^2 + 1.$$

Den anden gruppe giver

$$(x-\varepsilon_3)(x-\varepsilon_{11})(x-\varepsilon_{17})(x-\varepsilon_{25}) = \cdots = x^4 + a_3x^2 + 1\,,$$

og den tredje:

$$(x-\varepsilon_5)(x-\varepsilon_9)(x-\varepsilon_{19})(x-\varepsilon_{23}) = \cdots = x^4 + a_5x^2 + 1\,.$$

Dermed får vi opløsningen

$$p(x) = (x^4 + a_1x^2 + 1)(x^4 + a_3x^2 + 1)(x^4 + a_5x^2 + 1)$$

$$= x^{12} + (a_1 + a_3 + a_5)x^{10} + (3 + a_1a_3 + a_3a_5 + a_5a_1)x^8 + (2a_1 + 2a_3 + 2a_5 + a_1a_3a_5)x^6$$

$$+ (3 + a_1a_3 + a_3a_5 + a_5a_1)x^4 + (a_1 + a_3 + a_5)x^2 + 1\,.$$

Sammenligning af koefficienter giver

$$a_1 + a_3 + a_5 = -1 \quad , \quad 3 + a_1a_3 + a_3a_5 + a_5a_1 = 1 \quad , \quad 2a_1 + 2a_3 + 2a_5 + a_1a_3a_5 = -1 \quad ,$$

hvoraf

$$a_1 + a_3 + a_5 = -1 \quad , \quad a_1a_3 + a_3a_5 + a_5a_1 = -2 \quad , \quad a_1a_3a_5 = 1\,.$$

Efter (2) er

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{a_1+2}{4} + \frac{a_3+2}{4} + \frac{a_5+2}{4} = \frac{a_1+a_3+a_5+6}{4} = \frac{5}{4}\ ,$$

$$x_1x_3 + x_3x_5 + x_5x_1 = \frac{a_1+2}{4}\cdot\frac{a_3+2}{4} + \frac{a_3+2}{4}\cdot\frac{a_5+2}{4} + \frac{a_5+2}{4}\cdot\frac{a_1+2}{4}$$

$$= \frac{a_1a_3 + a_3a_5 + a_5a_1 + 4(a_1+a_3+a_5)+12}{16} = \frac{-2+4\cdot(-1)+12}{16} = \frac{3}{8}\,,$$

$$x_1x_3x_5 = \frac{a_1+2}{4}\cdot\frac{a_3+2}{4}\cdot\frac{a_5+2}{4} = \frac{a_1a_3a_5 + 2(a_1a_3+a_3a_5+a_5a_1)+4(a_1+a_3+a_5)+8}{64}$$

$$= \frac{1+2\cdot(-2)+4\cdot(-1)+8}{64} = \frac{1}{64}\,.$$

Dermed har vi

$$\frac{1}{\sin^4\frac{\pi}{14}} + \frac{1}{\sin^4\frac{3\pi}{14}} + \frac{1}{\sin^4\frac{5\pi}{14}} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_5^2} = \frac{x_1^2x_3^2 + x_3^2x_5^2 + x_5^2x_1^2}{(x_1x_3x_5)^2}$$

$$= \frac{(x_1x_3+x_3x_5+x_5x_1)^2 - 2x_1x_3x_5(x_1+x_3+x_5)}{(x_1x_3x_5)^2} = \frac{\left(\frac{3}{8}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{64}\cdot\frac{5}{4}}{\left(\frac{1}{64}\right)^2} = 416.$$

3. metode **(Palle Bak Petersen, Hillerød).**

Rødderne i polynomiet $f(x) = x^7 - 1$ er de 7. enhedsrødder

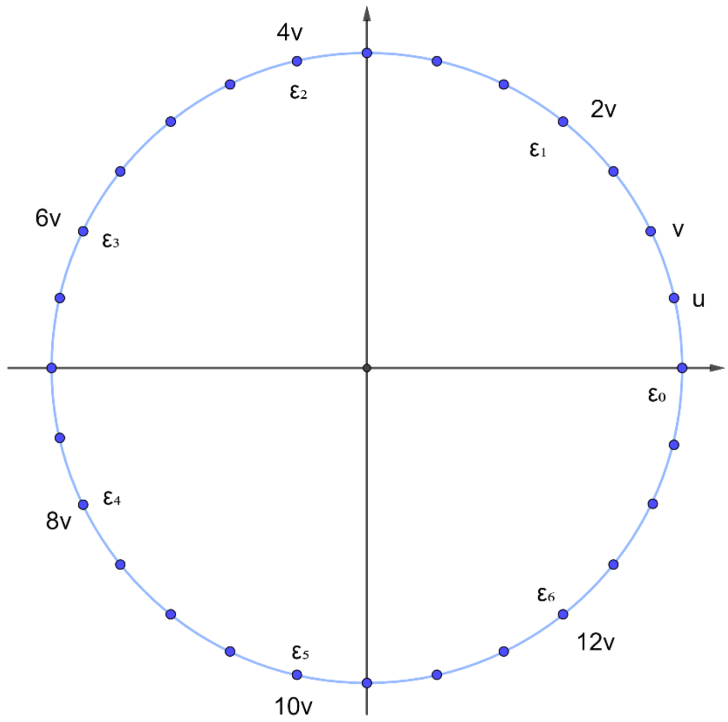
$$\varepsilon_k = \cos\tfrac{2\pi k}{7} + \mathrm{i}\sin\tfrac{2\pi k}{7} \quad , \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 6\,.$$

Summen af røddernes realdele er 0, og hvis vi for nemheds skyld sætter $v = \frac{\pi}{7}$, er derfor

$$1 + \cos 2v + \cos 4v + \cos 6v + \cos 8v + \cos 10v + \cos 12v = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + \cos 2v - \cos 3v - \cos v - \cos v - \cos 3v + \cos 2v = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - 2\cos v + 2\cos 2v - 2\cos 3v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos v - \cos 2v + \cos 3v = \tfrac{1}{2}\,.$$



Vi sætter $u = \frac{\pi}{14}$, så det givne udtryk kan omskrives til

$$\frac{1}{\sin^4\frac{\pi}{14}}+\frac{1}{\sin^4\frac{3\pi}{14}}+\frac{1}{\sin^4\frac{5\pi}{14}}=\frac{1}{\sin^4 u}+\frac{1}{\sin^4 3u}+\frac{1}{\sin^4 5u}$$

$$=\frac{\sin^4 u\cdot\sin^4 3u+\sin^4 u\cdot\sin^4 5u+\sin^4 3u\cdot\sin^4 5u}{\sin^4 u\cdot\sin^4 3u\cdot\sin^4 5u}=\frac{t}{n}.$$

Efter det trigonometriske formelmaskineri er

$$\sin^4 u = \tfrac{1}{8}\left(\cos 4u-4\cos 2u+3\right)$$

$$\sin^4 3u = \tfrac{1}{8}\left(\cos 12u-4\cos 6u+3\right)$$

$$\sin^4 5u = \tfrac{1}{8}\left(\cos 20u-4\cos 10u+3\right)\ .$$

Dermed kan vi udregne de tre produkter i tælleren:

$$\sin^4 u\cdot\sin^4 3u = \tfrac{1}{64}\left(\cos 4u-4\cos 2u+3\right)\left(\cos 12u-4\cos 6u+3\right)$$

$$=\tfrac{1}{64}\left(\cos 2v-4\cos v+3\right)\left(\cos 6v-4\cos 3v+3\right)$$

$$=\tfrac{1}{64}\left(\cos 2v-4\cos v+3\right)\left(-\cos v-4\cos 3v+3\right)\ .$$

Ved multiplikation af parenteserne og brug af formlen

$$\cos x\cdot\cos y=\tfrac{1}{2}\left(\cos(x-y)+\cos(x+y)\right)$$

får vi

$$\sin^4 u \cdot \sin^4 3u = \tfrac{1}{64}\left(11 - \tfrac{35}{2}\cos v + 15\cos 2v - \tfrac{41}{2}\cos 3v\right).$$

Efter samme princip fås

$$\sin^4 u \cdot \sin^4 5u = \tfrac{1}{64}\left(11 - \tfrac{41}{2}\cos v + \tfrac{35}{2}\cos 2v - 15\cos 3v\right)$$

og

$$\sin^4 3u \cdot \sin^4 5u = \tfrac{1}{64}\left(11 - 15\cos v + \tfrac{41}{2}\cos 2v - \tfrac{35}{2}\cos 3v\right).$$

Addition af de tre produkter giver

$$t = \tfrac{1}{64}\left(33 + 53(-\cos v + \cos 2v - \cos 3v)\right) = \tfrac{1}{64}\left(33 + 53 \cdot \tfrac{-1}{2}\right) = \tfrac{13}{128}.$$

Derefter reducerer vi nævneren:

$$n = \sin^4 u \cdot \sin^4 3u \cdot \sin^4 5u = \tfrac{1}{512}(\cos 2v - 4\cos v + 3)(11 - 15\cos v + \tfrac{41}{2}\cos 2v - \tfrac{35}{2}\cos 3v).$$

Efter et orgie af algebra når vi frem til

$$n = \tfrac{1}{512}\left(73\tfrac{1}{4} + 146\tfrac{1}{4}(\cos 2v - \cos v - \cos 3v)\right) = \tfrac{1}{512}\left(\tfrac{293}{4} + \tfrac{585}{4} \cdot \tfrac{-1}{2}\right) = \tfrac{1}{512} \cdot \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{4096}.$$

Den søgte størrelse har derfor værdien

$$\frac{1}{\sin^4 \frac{\pi}{14}} + \frac{1}{\sin^4 \frac{3\pi}{14}} + \frac{1}{\sin^4 \frac{5\pi}{14}} = \frac{\frac{13}{128}}{\frac{1}{4096}} = \frac{13 \cdot 4096}{128} = 416.$$

Bemærkning. Vi kan også reducere nævneren på følgende måde. Da $\sin \frac{3\pi}{14} = \cos \frac{4\pi}{14}$ og $\sin \frac{5\pi}{14} = \cos \frac{2\pi}{14}$, er

$$\sin u \cdot \sin 3u \cdot \sin 5u = \sin \tfrac{\pi}{14} \cdot \sin \tfrac{3\pi}{14} \cdot \sin \tfrac{5\pi}{14} = \sin \tfrac{\pi}{14} \cdot \sin \tfrac{3\pi}{14} \cdot \cos \tfrac{2\pi}{14}$$
$$= \frac{2\cos \frac{\pi}{14} \cdot \sin \frac{\pi}{14} \cdot \cos \frac{2\pi}{14} \cdot \cos \frac{4\pi}{14}}{2\cos \frac{\pi}{14}} = \frac{\sin \frac{2\pi}{14} \cdot \cos \frac{2\pi}{14} \cdot \cos \frac{4\pi}{14}}{2\cos \frac{\pi}{14}} = \frac{\sin \frac{4\pi}{14} \cdot \cos \frac{4\pi}{14}}{4\cos \frac{\pi}{14}}$$
$$= \frac{\sin \frac{8\pi}{14}}{8\cos \frac{\pi}{14}} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{8\pi}{14}\right)}{8\cos \frac{\pi}{14}} = \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{14}\right)}{8\cos \frac{\pi}{14}} = \frac{1}{8}.$$

Dermed er

$$n = \left(\sin \tfrac{\pi}{14} \cdot \sin \tfrac{3\pi}{14} \cdot \sin \tfrac{5\pi}{14}\right)^4 = \left(\tfrac{1}{8}\right)^4 = \tfrac{1}{4096}.$$

Bemærkning. Som oven for nævnt er

$$\sin \tfrac{\pi}{14} = \cos \tfrac{3\pi}{7}\ ,\ \sin \tfrac{3\pi}{14} = -\cos \tfrac{5\pi}{7} = \cos \tfrac{2\pi}{7}\ ,\ \sin \tfrac{5\pi}{14} = \cos \tfrac{\pi}{7}\ ,$$

så formlen også kan skrives på følgende smukke måde:

$$\frac{1}{\cos^4 \frac{\pi}{7}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{3\pi}{7}} = 416.$$

***4. metode* (Asger Olesen, Tønder).**

Ved at benytte formlerne

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad \text{og} \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

fås

$$\sin\tfrac{\pi}{14} = -\cos\tfrac{4\pi}{7} \quad , \quad \sin\tfrac{3\pi}{14} = \cos\tfrac{2\pi}{7} \quad , \quad \sin\tfrac{5\pi}{14} = \cos\tfrac{\pi}{7} \; ,$$

så formlen kan omskrives til

$$\frac{1}{\cos^4\frac{\pi}{7}} + \frac{1}{\cos^4\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\cos^4\frac{3\pi}{7}} = 416.$$

Den trigonometriske funktion *secans* er som bekendt defineret ved

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \; ,$$

så vi skal vise, at

$$\sec^4\tfrac{\pi}{7} + \sec^4\tfrac{2\pi}{7} + \sec^4\tfrac{4\pi}{7} = 416 \; .$$

Nu er

$$(A, B, C) = \left(\frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}\right)$$

vinkelsættet i den såkaldt *heptagonale trekant*, som indeholder en mængde interessante sætninger, som kan findes i henvisninger for neden. I den heptagonale trekant skal vi vise, at

$$\sec^4 A + \sec^4 B + \sec^4 C = 416 \; .$$

Vi har, at

$$\sec^4 A + \sec^4 B + \sec^4 C = (\sec^2 A + \sec^2 B + \sec^2 C)^2$$
$$- 2(\sec^2 A \cdot \sec^2 B + \sec^2 B \cdot \sec^2 C + \sec^2 C \cdot \sec^2 A) \; ,$$

Så det ønskede vil være vist, hvis vi kan vise, at

$$\sec^2 A + \sec^2 B + \sec^2 C = 24$$

og

$$\sec^2 A \cdot \sec^2 B + \sec^2 B \cdot \sec^2 C + \sec^2 C \cdot \sec^2 A = 80 \; ,$$

fordi

$$24^2 - 2 \cdot 80 = 416 \; .$$

Vi viser to lemmaer, der fører frem til disse resultater.

Lemma 1. I den heptagonale trekant gælder

$$\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = -\tfrac{1}{8}.$$

Bevis. Vi får, at

$$-\sin\tfrac{\pi}{7} = \sin\left(\pi + \tfrac{\pi}{7}\right) = \sin\tfrac{8\pi}{7} = 2\sin\tfrac{4\pi}{7} \cdot \cos\tfrac{4\pi}{7} = 4\sin\tfrac{2\pi}{7} \cdot \cos\tfrac{2\pi}{7} \cdot \cos\tfrac{4\pi}{7}$$

$$= 8\sin\tfrac{\pi}{7} \cdot \cos\tfrac{\pi}{7} \cdot \cos\tfrac{2\pi}{7} \cdot \cos\tfrac{4\pi}{7} = 8\sin\tfrac{\pi}{7} \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \; ,$$

hvoraf

$$\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = -\tfrac{1}{8}.$$

Lemma 2. I den heptagonale trekant gælder

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \tfrac{5}{4} \; .$$

Bevis. I enhver trekant er

$$-\cos C = \cos(A + B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos A \cdot \cos B + \cos C = \sin A \cdot \sin B \,,$$

og ved kvadrering fås

$$\cos^2 A \cdot \cos^2 B + 2\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C + \cos^2 C = \sin^2 A \cdot \sin^2 B$$
$$\Leftrightarrow \quad (1 - \sin^2 A)(1 - \sin^2 B) + 2\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C + 1 - \sin^2 C = \sin^2 A \cdot \sin^2 B$$
$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \,.$$

I den heptagonale trekant bliver dette til

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 - 2 \cdot \tfrac{1}{8} = \tfrac{7}{4},$$

så at

$$1 - \cos^2 A + 1 - \cos^2 B + 1 - \cos^2 C = \tfrac{7}{4}$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 3 - \tfrac{7}{4} = \tfrac{5}{4} \,.$$

Nu får vi

$$\sec^2 A \cdot \sec^2 B = \frac{1}{\cos^2 A \cdot \cos^2 B} = \frac{\cos^2 C}{\cos^2 A \cdot \cos^2 B \cdot \cos^2 C} \,,$$

og tilsvarende for de to andre produkter $\sec^2 B \cdot \sec^2 C$ og $\sec^2 C \cdot \sec^2 A$. Efter lemma 1 og lemma 2 får vi så

$$\sec^2 A \cdot \sec^2 B + \sec^2 B \cdot \sec^2 C + \sec^2 C \cdot \sec^2 A = \frac{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C}{\cos^2 A \cdot \cos^2 B \cdot \cos^2 C} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{64}} = 80 \,.$$

Vi viser dernæst, at

$$\sec^2 A + \sec^2 B + \sec^2 C = 24 \,.$$

Vi har, at

$$\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \,,$$

så vi skal vise, at der i den heptagonale trekant gælder

$$1 + \tan^2 A + 1 + \tan^2 B + 1 + \tan^2 C = 24$$

eller at

$$\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C = 21.$$

Vinklerne i trekanten er

$$(A, B, C) = \left(\frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7} \right),$$

og vi får

$$\tan 4 \cdot \tfrac{\pi}{7} = -\tan 3 \cdot \tfrac{\pi}{7}$$
$$\tan 4 \cdot \tfrac{2\pi}{7} = \tan \tfrac{8\pi}{7} = -\tan \tfrac{6\pi}{7} = -\tan 3 \cdot \tfrac{2\pi}{7}$$
$$\tan 4 \cdot \tfrac{4\pi}{7} = \tan \tfrac{16\pi}{7} = \tan \tfrac{2\pi}{7} = -\tan \tfrac{12\pi}{7} = -\tan 3 \cdot \tfrac{4\pi}{7}.$$

For enhver af vinklerne x i den heptagonale trekant gælder altså, at

$$\tan 4x = -\tan 3x \,.$$

Efter det trigonometriske formelmaskineri er

$$\tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x} \quad , \quad \tan 4x = \frac{4\tan x - 4\tan^3 x}{\tan^4 x - 6\tan^2 x + 1} \ ,$$

så vi får

$$\tan 4x = -\tan 3x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4\tan x - 4\tan^3 x}{\tan^4 x - 6\tan^2 x + 1} = \frac{\tan^3 x - 3\tan x}{1 - 3\tan^2 x} \ .$$

For overskuelighedens skyld sætter vi $t = \tan x$ og får

$$\frac{4t - 4t^3}{t^4 - 6t^2 + 1} = \frac{t^3 - 3t}{1 - 3t^2} \quad \Leftrightarrow \quad (4t - 4t^3)(1 - 3t^2) = (t^4 - 6t^2 + 1)(t^3 - 3t)$$

$$\Leftrightarrow \quad t(t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tan x((\tan^2 x)^3 - 21(\tan^2 x)^2 + 35\tan^2 x - 7) = 0 \ .$$

I denne ligning kan x antage værdierne $\frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}$, så løsningerne til ligningen

$$z^3 - 21z^2 + 35z - 7 = 0$$

er $\tan^2 A$, $\tan^2 B$ og $\tan^2 C$. Efter Vietes formler for rødderne i polynomiet får vi, at

$$\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C = 21$$

som ønsket.

Bemærkning:

Den anførte formel er et specialtilfælde af følgende generelle formel:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos^4 \frac{k\pi}{2n+1}} = \frac{8}{3} n(n+1)(n^2 + n + 1) \ .$$

For $n = 3$ får vi formlen i opgaven på formen

$$\frac{1}{\cos^4 \frac{\pi}{7}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{3\pi}{7}} = 416 .$$

For $n = 4$ får vi

$$\frac{1}{\cos^4 \frac{\pi}{9}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{2\pi}{9}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{3\pi}{9}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{4\pi}{9}} = 1120 \ ,$$

og $n = 5$ giver

$$\frac{1}{\cos^4 \frac{\pi}{11}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{2\pi}{11}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{3\pi}{11}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{4\pi}{11}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{5\pi}{11}} = 2480 \ .$$

Henvisninger:

Jens Carstensen: *Den heptagonale trekant* (Matematiske juveler, 2006)
Jens Carstensen: *Mere om den heptagonale trekant* (Matematiske juveler, 2006 & LMFK-Bladet, februar 2002)
Leon Bankoff & Jack Garfunkel: *The heptagonal Triangle* (Mathematics Magazine, Jan-Feb 1973, The Mathematical Association of America)
Alija Muminagić & Jens Carstensen: *Den heptagonale trekant* (MatematikMagasinet 100, oktober 2017)

Besvarelser modtaget fra:

- Jens-Søren Andersen
- Roger Bengtsson
- Hans Benner
- Walther Janous
- Hans Mortensen
- Asger Olesen
- Jan Erik Pedersen
- Palle Bak Petersen