Svar på opgave 385 (December 2021)

Opgave:

Et par (lette?) uligheder i to variable

a. Vis, at der for ikke-negative reelle tal a og b gælder

$$(a + b)(1 + ab) \geq 4ab\ .$$

b. Vis, at der for ikke-negative reelle tal a og b gælder

$$(a^3 - b^3)(a - b) \geq 3ab(a - b)^2\ .$$

c. Vis, at der for reelle tal a, $b \geq 1$ gælder

$$a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1}\leq ab.$$

d. Vis, at der for positive reelle tal a og b gælder

$$\frac{1}{1+2a}+\frac{1}{1+2b}\geq\frac{2}{ab+2}\ .$$

e. Vis, at der for positive reelle tal a og b gælder

$$\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}\geq\frac{1}{ab+1}\ .$$

f. Vis, at der for ikke-negative reelle tal a og b gælder

$$\tfrac{1}{2}(a+b)^2+\tfrac{1}{4}(a+b)\geq a\sqrt{b}+b\sqrt{a}\,.$$

Besvarelse:

a.

Vi har i almindelighed, at

$$a+b\geq 2\sqrt{ab}\ ,$$

fordi denne ulighed er ensbetydende med $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\geq 0$. Desuden er

$$1+ab\geq 2\sqrt{ab}\ ,$$

fordi den er ensbetydende med $\left(1-\sqrt{ab}\right)^2 \geq 0.$ Multiplikation giver

$$(a+b)(1+ab) \geq 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{ab} = 4ab.$$

Lighedstegn gælder netop hvis $a = b = 0$ eller hvis $a = b = 1$.

b.

Der gælder, at

$$(a^3 - b^3)(a - b) = (a^2 + ab + b^2)(a - b)^2 .$$

Desuden er

$$a^2 + b^2 \geq 2ab ,$$

så at

$$a^2 + ab + b^2 \geq 3ab .$$

Dermed er

$$(a^3 - b^3)(a - b) = (a^2 + ab + b^2)(a - b)^2 \geq 3ab(a - b)^2 .$$

Forudsætningen om, at a og b skal være ikke-negative, er overflødig. Lighedstegn gæl- der netop hvis a = b.

c.

1. metode.

Vi har, at

$$a^2 \geq 4a - 4$$

fordi uligheden er ensbetydende med $(a - 2)^2 \geq 0$. Derefter er

$$a^2 \geq 4a-4 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{4}a^2 \geq a-1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a-1}{a^2} \leq \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{a-1}{a^2}} \leq \frac{1}{2} .$$

Altså er

$$\frac{\sqrt{a-1}}{a} \leq \frac{1}{2} \quad \text{og} \quad \frac{\sqrt{b-1}}{b} \leq \frac{1}{2} .$$

Addition giver

$$\frac{\sqrt{a-1}}{a} + \frac{\sqrt{b-1}}{b} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad b\sqrt{a-1} + a\sqrt{b-1} \leq ab.$$

Lighedstegn gælder netop hvis $a = b = 2$.

2. metode (Jens-Søren Andersen).

Uligheden er ensbetydende med

$$\frac{\sqrt{b-1}}{b} + \frac{\sqrt{a-1}}{a} \leq 1 .$$

Nu er

$$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{b-1}}{b}=\frac{(b-1)+1-2\sqrt{b-1}}{2b}=\frac{\left(\sqrt{b-1}-1\right)^2}{2b}\geq 0\ ,$$

så at

$$\frac{\sqrt{b-1}}{b}\leq\frac{1}{2}\quad \text{og tilsvarende}\quad \frac{\sqrt{a-1}}{a}\leq\frac{1}{2}\ .$$

Addition giver det ønskede. Lighedstegn i uligheden gælder for $a = b = 2$.

3. metode (Walther Janous, Innsbruck).

Vi sætter

$$a = x^2 + 1\ ,\quad b = y^2 + 1\ ,$$

så uligheden er ensbetydende med

$$\begin{aligned}
&(x^2 + 1)y + (y^2 + 1)x \leq (x^2 + 1)(y^2 + 1)\\
\Leftrightarrow\quad & x^2y + y + xy^2 + x \leq (x^2 + 1)(y^2 + 1)\\
\Leftrightarrow\quad & (x + y)(xy + 1) \leq (x^2 + 1)(y^2 + 1)\\
\Leftrightarrow\quad & x^2(y^2 - y + 1) - x(y^2 + 1) + y^2 - y + 1 \geq 0\ . \qquad (1)
\end{aligned}$$

På venstre side er udtrykket et andengradspolynomium i x med diskriminanten

$$(y^2 + 1)^2 - 4(y^2 - y + 1)^2 = -3y^4 + 8y^3 - 10y^2 + 8y - 3 = (y - 1)^2(-(y - 1)^2 - 2(y^2 + 1))\ ,$$

som er ikke-positiv for alle y. Altså er andengradspolynomiet i (1) ikke-negativt for alle x.

4. metode (Jan Erik Pedersen).

Ved kvadrering fås, at uligheden er ensbetydende med

$$a^2(b - 1) + b^2(a - 1) + 2ab\sqrt{(a-1)(b-1)} \leq a^2b^2\ .$$

Uligheden mellem aritmetisk og geometrisk middeltal giver for de ikke-negative tal $a - 1$ og $b - 1$, at

$$\tfrac{1}{2}((a-1)+(b-1)) \geq \sqrt{(a-1)(b-1)}$$

eller

$$2\sqrt{(a-1)(b-1)} \leq a+b-2\ .$$

Altså er

$$a^2(b - 1) + b^2(a - 1) + 2ab\sqrt{(a-1)(b-1)} \leq a^2(b-1)+b^2(a-1)+ab(a+b-2).$$

Vi viser nu, at

$$a^2(b - 1) + b^2(a - 1) + ab(a + b - 2) \leq a^2b^2\ , \qquad (2)$$

hvilket medfører den ønskede ulighed. Vi får, at (2) kan omskrives til

$$\begin{aligned}
&a^2b - a^2 + b^2a - b^2 + a^2b + ab^2 - 2ab \leq a^2b^2\\
\Leftrightarrow\quad & a^2 + b^2 + 2ab - 2a^2b - 2ab^2 + a^2b^2 \geq 0
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad (a+b)^2 - 2ab(a+b) + a^2b^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a+b-ab)^2 \geq 0 \,,$$

hvilket er sandt.

d.

1. metode.

Vi sætter $s = a + b$ og $p = ab$. Så omskrives uligheden sådan:

$$\frac{1+2b+1+2a}{(1+2a)(1+2b)} \geq \frac{2}{ab+2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2+2s}{1+2s+4p} \geq \frac{2}{p+2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+s}{1+2s+4p} \geq \frac{1}{p+2}$$

$$\Leftrightarrow \quad (1+s)(2+p) \geq 1+2s+4p \quad \Leftrightarrow \quad 2+p+2s+sp \geq 1+2s+4p$$

$$\Leftrightarrow \quad 1+ps \geq 3p \quad \Leftrightarrow \quad 1+ab(a+b) \geq 3ab \quad \Leftrightarrow \quad 1+a^2b+ab^2 \geq 3ab \,. \qquad (3)$$

Efter uligheden mellem aritmetisk og geometrisk middeltal gælder

$$\frac{1+a^2b+ab^2}{3} \geq \sqrt[3]{1\cdot a^2b\cdot ab^2} \quad \Leftrightarrow \quad 1+a^2b+ab^2 \geq 3ab \,,$$

og dermed er (3) sand.

2.metode (Jens-Søren Andersen).

Som under 1. metode får vi uligheden

$$1+a^2b+ab^2 \geq 3ab \,,$$

som omskrives til

$$ab(a+b) - 3ab + 1 \geq 0 \,,$$

og denne ulighed skal vises. Idet

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \,,$$

får vi

$$ab(a+b) - 3ab + 1 \geq ab\cdot 2\sqrt{ab} - 3ab + 1 = 2\sqrt{ab}^{\,3} - 3\sqrt{ab}^{\,2} + 1$$

$$= \left(\sqrt{ab}-1\right)^2 \cdot \left(2\sqrt{ab}+1\right) \geq 0 \,,$$

hvilket er det ønskede.

3. metode.

Vi bemærker først, at der positive tal p, q, x og y gælder, at

$$\frac{p}{q} + \frac{x}{y} \geq \frac{(p+x)^2}{pq+xy} \,, \qquad (4)$$

thi denne ulighed er efter lidt trælse men simple algebraiske reduktioner ensbetydende med

$$(y-q)^2 \geq 0 \,.$$

Nu sætter vi $a = \frac{1}{x}$ og $b = \frac{1}{y}$, så uligheden er ensbetydende med

$$\frac{1}{1+\frac{2}{x}} + \frac{1}{1+\frac{2}{y}} \geq \frac{2}{\frac{1}{xy}+2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{x+2} + \frac{y}{y+2} \geq \frac{2xy}{2xy+1} \; .$$

Efter (4) er

$$\frac{x}{x+2} + \frac{y}{y+2} \geq \frac{(x+y)^2}{x(x+2)+y(y+2)} \; ,$$

så vi ønsker at vise, at

$$\frac{(x+y)^2}{x(x+2)+y(y+2)} \geq \frac{2xy}{2xy+1} \; . \tag{5}$$

Vi sætter igen $s = x + y$ og $p = xy$, så at

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = s^2 - 2p \; ,$$

så (5) er ensbetydende med

$$\frac{s^2}{x^2+y^2+2(x+y)} \geq \frac{2p}{2p+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{s^2}{s^2-2p+2s} \geq \frac{2p}{2p+1} \; . \tag{6}$$

Her er nævneren positiv, så (4) er ensbetydende med

$$s^2(2p + 1) \geq 2p(s^2 + 2s - 2p) \quad \Leftrightarrow \quad 2ps^2 + s^2 \geq 2ps^2 + 4sp - 4p^2$$

$$\Leftrightarrow \quad s^2 - 4sp + 4p^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (s - 2p)^2 \geq 0,$$

hvilket er sandt.

4. metode (Jan Erik Pedersen).

Uligheden er ensbetydende med

$$\frac{(1+2b)(ab+2)+(1+2a)(ab+2)-2(1+2a)(1+2b)}{(1+2a)(1+2b)(ab+2)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2a^2b+2ab^2-6ab+2}{(1+2a)(1+2b)(ab+2)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^2b+ab^2-3ab+1}{(1+2a)(1+2b)(ab+2)} \geq 0 \; . \tag{7}$$

Uligheden mellem det aritmetiske og geometriske middeltal giver

$$\tfrac{1}{3}(a^2b+ab^2+1) \geq \sqrt[3]{a^2b \cdot ab^2 \cdot 1} \quad \Leftrightarrow \quad a^2b+ab^2+1 \geq 3ab \; .$$

Dette viser, at uligheden (7) er opfyldt.

5. metode (Asger Olesen).

Ved multiplikation med nævnerne er uligheden efter 1. me- toometode ensbetydende med

$$1+ab(a+b) \geq 3ab \quad \Leftrightarrow \quad a+b+\tfrac{1}{ab} \geq 3 \; .$$

Uligheden mellem aritmetisk og geometrisk middeltal giver

$$\tfrac{1}{3}\left(a+b+\tfrac{1}{ab}\right) \geq \sqrt[3]{a\cdot b\cdot \tfrac{1}{ab}} = 1\ ,$$

hvilket er ensbetydende med

$$a+b+\tfrac{1}{ab} \geq 3\ ,$$

hvilket skulle bevises.

e.

1. metode.

Vi benytter Cauchy-Schwarz' ulighed

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)\ ,$$

hvor

$$a_1 = \sqrt{\tfrac{a}{b}}\ ,\ b_1 = \sqrt{ab}\ ,\ a_2 = b_2 = 1\ ,$$

så vi får

$$(a+1)^2 \leq \left(\tfrac{a}{b}+1\right)(ab+1)\ , \tag{8}$$

og tilsvarende

$$(b+1)^2 \leq \left(\tfrac{b}{a}+1\right)(ab+1)\,.$$

Dermed er

$$\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} \geq \frac{1}{\left(\tfrac{a}{b}+1\right)(ab+1)} + \frac{1}{\left(\tfrac{b}{a}+1\right)(ab+1)}\quad . \tag{9}$$

Vi udregner højre side af ulighedstegnet til:

$$\frac{\tfrac{b}{a}+1+\tfrac{a}{b}+1}{(ab+1)\left(\tfrac{a}{b}+1\right)\left(\tfrac{b}{a}+1\right)} = \frac{\tfrac{b}{a}+\tfrac{a}{b}+2}{(ab+1)\left(1+\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{a}+1\right)} = \frac{1}{ab+1}\ ,$$

så (9) er ensbetydende med

$$\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} \geq \frac{1}{ab+1}\ .$$

Uligheden (8) ses i øvrigt at være sand uden brug af Cauchy-Schwarz' ulighed, idet den er ensbetydende med

$$a^2 + 1 + 2a \leq a^2 + \tfrac{a}{b} + ab + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2a \leq \tfrac{a}{b} + ab$$

$$\Leftrightarrow \quad 2ab \leq a + ab^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2b \leq 1 + b^2 \quad \Leftrightarrow \quad (b - 1)^2 \geq 0\ .$$

Problemet er naturligvis at finde på uligheden (8) i første omgang.

2. metode.

Uligheden omskrives til

$$\frac{(b+1)^2+(a+1)^2}{(a+1)^2\cdot(b+1)^2} \geq \frac{1}{1+ab} .$$

Vi sætter $s = \frac{1}{2}(a + b)$ og $p = \sqrt{ab}$, så $a + b = 2s$ og $ab = p^2$. Dermed er

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 4s^2 - 2p^2 .$$

Vi udregner nævneren i ulighedens venstre side:

$$(a + 1)^2\cdot(b + 1)^2 = (ab + a + b + 1)^2 = (p^2 + 2s + 1)^2 \ ,$$

og tælleren

$$(a + 1)^2 + (b + 1)^2 = a^2 + b^2 + 2(a + b) + 2 = 4s^2 - 2p^2 + 4s + 2 .$$

Uligheden er dermed ensbetydende med

$$\frac{4s^2-2p^2+4s+2}{(p^2+2s+1)^2} \geq \frac{1}{1+p^2} \quad \Leftrightarrow \quad (4s^2 - 2p^2 + 4s + 2)(1 + p^2) \geq (p^2 + 2s + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 4s^2 - 2p^2 + 4s + 2 + 4s^2p^2 - 2p^4 + 4sp^2 + 2p^2 \geq p^4 + 4s^2 + 1 + 4sp^2 + 2p^2 + 4s$$

$$\Leftrightarrow \quad 3p^4 + 2p^2 - 2 - 4s^2p^2 + 1 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4s^2p^2 - 3p^4 - 2p^2 + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4p^2(s^2 - p^2) + (p^2 - 1)^2 \geq 0.$$

Dette er sandt, da $s \geq p$. *3. metode* (Jan Erik Pedersen). Uligheden er ensbetydende med

$$\frac{(1+b)^2(ab+1)+(1+a)^2(ab+1)-(1+a)^2(1+b)^2}{(1+a)^2(1+b)^2(ab+1)} \geq 0 ,$$

som reduceres til

$$\frac{a^3b+ab^3-a^2b^2-2ab+1}{(1+a)^2(1+b)^2(ab+1)} \geq 0 . \tag{10}$$

Nu er

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \quad \text{eller} \quad a^3b + \mathrm{ab}^3 \geq 2a^2b^2 \ ,$$

så at

$$a^3b + ab^3 - a^2b^2 - 2ab + 1 \geq 2a^2b^2 - a^2b^2 - 2ab + 1 = (a^2b^2 - 2ab + 1) = (ab - 1)^2 .$$

Altså er

$$\frac{a^3b+ab^3-a^2b^2-2ab+1}{(1+a)^2(1+b)^2(ab+1)} \geq \frac{(ab-1)^2}{(1+a)^2(1+b)^2(ab+1)} \geq 0 \ ,$$

så (10) er sand.

f.

1. metode.

Vi viser, at

$$\tfrac{1}{2}(a+b)^2+\tfrac{1}{4}(a+b) \geq (a+b)\sqrt{\tfrac{1}{2}(a+b)} \quad \text{og} \quad (a+b)\sqrt{\tfrac{1}{2}(a+b)} \geq a\sqrt{b}+b\sqrt{a} \ ,$$

for af disse to uligheder fremgår det ønskede.
Ved kvadrering af den sidste ulighed fås

$$\tfrac{1}{2}(a+b)^3 \geq \left(a\sqrt{b}+b\sqrt{a}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3) \geq a^2b+ab^2+2ab\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow \quad a^3+a^2b+ab^2+b^3 \geq 4ab\sqrt{ab} \ .$$

Uligheden mellem aritmetisk og geometrisk middeltal for tallene a^3, b^3, a^2b og ab^2 giver

$$\tfrac{1}{4}\left(a^3+a^2b+ab^2+b^3\right) \geq \sqrt[4]{a^3 \cdot a^2b \cdot ab^2 \cdot b^3}$$

$$\Leftrightarrow \quad a^3+a^2b+ab^2+b^3 \geq 4\sqrt[4]{a^6b^6} = 4ab\sqrt{ab} \ .$$

Dermed er den sidste ulighed vist.
Den første ulighed vises ved at sætte $k = a + b$:

$$\tfrac{1}{2}k^2+\tfrac{1}{4}k \geq k\sqrt{\tfrac{1}{2}k} \quad \Leftrightarrow \quad 2k^2+k \geq k\sqrt{8k} \quad \Leftrightarrow \quad 2k+1 \geq \sqrt{8k}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4k^2+1+4k \geq 8k \quad \Leftrightarrow \quad (2k-1)^2 \geq 0 \ ,$$

hvilket er sandt.

2. metode.

Uligheden er ensbetydende med

$$\tfrac{1}{2}(a+b)(a+b+\tfrac{1}{2})-a\sqrt{b}-b\sqrt{a} \geq 0 \ . \tag{11}$$

Vi benytter, at der for ikke-negative a og b gælder, at

$$\tfrac{1}{2}(a+b) \geq \sqrt{ab}$$

så

$$\tfrac{1}{2}(a+b)(a+b+\tfrac{1}{2})-a\sqrt{b}-b\sqrt{a} \geq \sqrt{ab}(a+b+\tfrac{1}{2})-\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$$

$$= \sqrt{ab}\left(a+b+\tfrac{1}{2}-\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = \sqrt{ab}\left(\left(\sqrt{a}-\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\tfrac{1}{2}\right)^2\right) \geq 0.$$

Altså er uligheden (11) opfyldt.
Lighedstegnet i den givne ulighed gælder netop hvis $a = b = 0$ eller $a = b = \tfrac{1}{4}$.

3. metode (Walther Janous, Innsbruck).

Vi sætter

$$a = x^2 \quad , \quad b = y^2 \ ,$$

så uligheden er ensbetydende med

$$\tfrac{1}{2}(x^2+y^2)^2+\tfrac{1}{4}(x^2+y^2) \geq x^2y+y^2x$$

$$\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}(x^2+y^2)^2+\tfrac{1}{4}(x^2+y^2) \geq xy(x+y) \ . \tag{12}$$

Nu er $xy \le \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ fordi denne ulighed er ensbetydende med

$$2xy \le x^2+y^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x-y)^2 \ge 0.$$

Vi viser den skarpere ulighed i forhold til (12):

$$\tfrac{1}{2}(x^2+y^2)^2+\tfrac{1}{4}(x^2+y^2) \ge \tfrac{1}{2}(x^2+y^2)(x+y)$$

$$\tfrac{1}{2}(x^2+y^2)+\tfrac{1}{4} \ \ge \ \tfrac{1}{2}(x+y) \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2+2y^2+1 \ge 2x+2y$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2+2y^2-2x-2y+1 \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2+2\left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2 \ge 0 \ ,$$

hvilket er sandt.

4. metode (Asger Olesen).

Ved multiplikation med det positive tal $\frac{4}{ab}$ er uligheden ensbetydende med

$$\frac{2(a+b)^2}{ab}+\frac{a+b}{ab} \ge \frac{4a\sqrt{b}+4b\sqrt{a}}{ab}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\left(\frac{a}{\sqrt{ab}}+\frac{b}{\sqrt{ab}}\right)^2+\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \ \ge \ \frac{4}{\sqrt{a}}+\frac{4}{\sqrt{b}} \quad \text{k}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2-\frac{4}{\sqrt{a}}+4+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2-\frac{4}{\sqrt{b}}+4 \ge 8$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-2\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}-2\right)^2 \ge 8\,. \tag{13}$$

Idet der for alle $x, y > 0$ gælder, at $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \ge 2$, er

$$2\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^2 \ge 2\cdot 2^2 = 8$$

For alle a, $b > 0$, så (13) er opfyldt.

Besvarelser modtaget fra:

- Jens-Søren Andersen
- Hans Benner
- Walther Janous
- Hans Mortensen
- Asger Olsen
- Jan Erik Pedersen