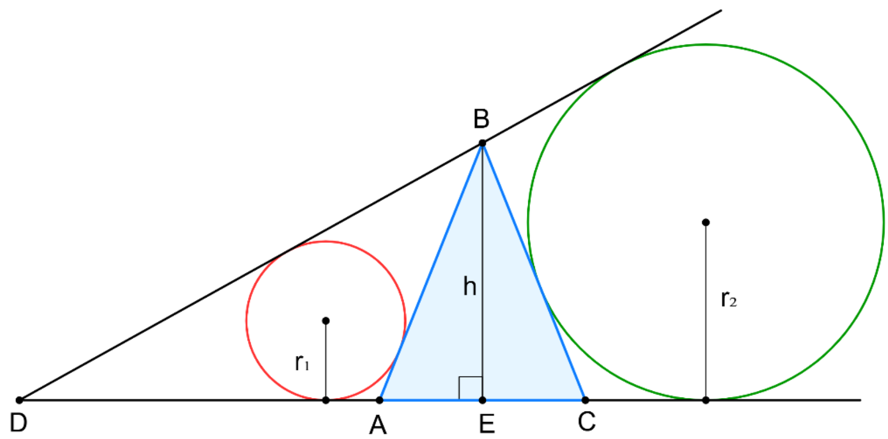
Svar på opgave 383 (Oktober 2021)

Opgave:

ΔABC er ligebenet med $BA = BC$ og $h = BE$ er højden fra B.
Punktet D vælges på forlængelsen af CA ud over A.
Den indskrevne cirkel i ΔABD har radius r_1 og
radius i den ydre røringscirkel for siden BC i ΔDBC er r_2.
Vis, at $h = r_1 + r_2$.

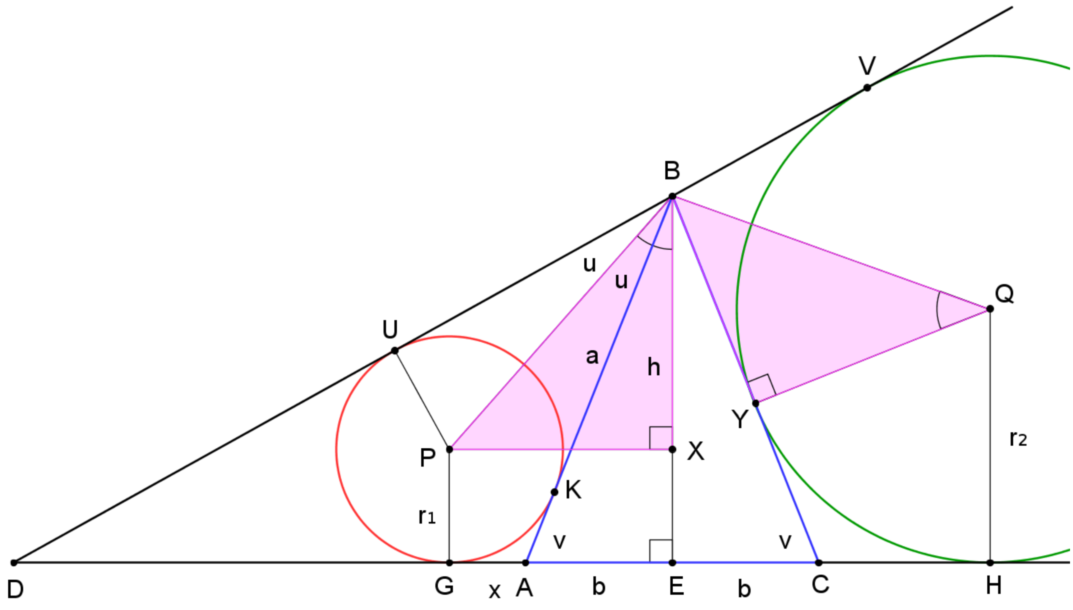


Besvarelse:

1. metode

Lad P og Q være cirklernes centrer. Projektionerne af P på BE, AD og DB er X, G og U og projektionerne af Q på BC, AD og DB er Y, H og V. Den lille cirkel tange- rer BA i K.
Vi sætter

$$a = AB = BC \quad , \quad b = AE = EC \quad , \quad x = GA = AK \quad , \quad y = CH = CY \, .$$



Lad $2s_1$ og $2s_2$ være omkredsene af ΔDBA og ΔDBC, så

$$2s_1 = AD + AB + BD \quad , \quad 2s_2 = DC + BC + DB\,.$$

Vi har at

$$DC = DA + 2b \quad \text{og} \quad AB = BC\ ,$$

så vi får

$$2s_1 - AD = AB + BD \quad \text{og} \quad 2s_2 - DC = BC + BD\,,$$

og da $AB = BC$ er

$$2s_1 - AD = 2s_2 - DC \quad \Leftrightarrow \quad 2s_1 - AD = 2s_2 - (AD + 2b) \quad \Leftrightarrow \quad s_1 = s_2 - b\,.$$

For den ydre røringscirkel for ΔDBC svarende til siden BC gælder

$$BV = BY = s_2 - DB = s_2 - (DU + UB)\ .$$

Da en tangentvinkels ben er lige lange er

$$UB = BK = BA - KA = a - AG = a - x \quad \text{og} \quad DU = DG\ ,$$

så

$$BV = BY = s_2 - (DG + a - x)\,. \tag{1}$$

Nu er

$$2s_1 = (DG + DU) + (BU + BK) + (AG + AK) = 2DG + 2BK + 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad s_1 = DG + BK + x = DG + BK + KA = DG + a\ . \tag{2}$$

Idet $s_2 = s_1 + b$ får vi af (1) og (2):

$$BV = BY = s_1 + b - DG - a + x = x + b = GE\,. \tag{3}$$

Vi sætter

$$u = \angle ABP \ \text{ og } \ v = \angle BAC\,.$$

Så er

$$\angle XBA = \angle EBA = 90° - v$$

og i ΔBPX får vi

$$\angle XBP = \angle XBA + \angle ABP = 90° - v + u \quad , \quad \angle BPX = v - u\,.$$

Derefter ser vi på ΔBYQ og får

$$\angle QBY = \tfrac{1}{2}\angle VBY = \tfrac{1}{2}\cdot\left(180^\circ - \angle DBY\right) . \qquad (4)$$

I ΔABD er $\angle DAB = 180^\circ - v$ og dermed

$$\angle ADB = 180^\circ - 2u - (180^\circ - v) = v - 2u .$$

I ΔDBC er

$$\angle DBY = \angle DBC = 2u + 180^\circ - 2v ,$$

så vi efter (4) får

$$\angle QBY = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\cdot\angle DBY = 90^\circ - (u + 90^\circ - v)$$
$$= 90^\circ - u - 90^\circ + v = v - u = \angle BPX .$$

Dermed får vi i ΔBQY, at

$$\angle BQY = 90^\circ - \angle QBY = 90^\circ - v + u = \angle XBP .$$

Derfor er ΔBYQ og ΔBXP ensvinklede, og da vi efter (3) har at

$$BY = GE = PX ,$$

er de to trekanter endda kongruente. Så er

$$BX = QY = r_2 ,$$

og da desuden

$$XE = PG = r_1$$

har vi

$$h = BE = BX + XE = r_2 + r_1 .$$

2. metode

Vi sætter $a = AB = BC$ og $b = AE = EC$. Med figurens betegnelser har vi, at

$$AL = AQ \quad , \quad BQ = BK \quad , \quad DL = DK .$$

Dermed er

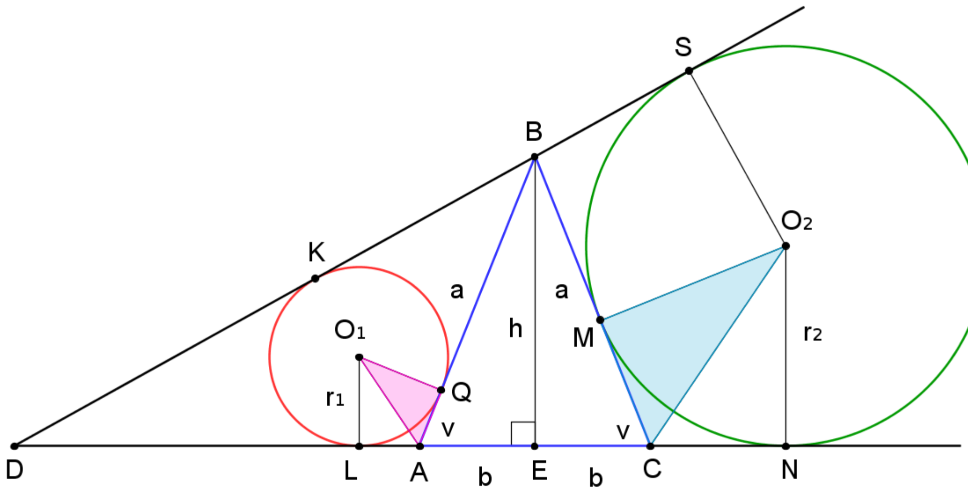
$$DL + BQ = DK + BK = DB ,$$

hvoraf

$$(AD - AL) + (AB - AQ) = DB .$$

Da $AL = AQ$, får vi heraf

$$AQ = AD - AL + AB - DB \quad \Leftrightarrow \quad 2AQ = AD + AB - DB .$$



På samme måde er

$$2CM = BD + CB - DC \,,$$

fordi dette under anvendelse af $CM = CN$ og $BM = BS$ er ensbetydende med

$$2CM = BD + CM + BM - DC \quad \Leftrightarrow \quad CM = BD + BM - DC$$

$$\Leftrightarrow \quad CM = BD + BM - (DN - CN) \quad \Leftrightarrow \quad CM = BD + BM - DN + CN$$

$$\Leftrightarrow \quad BD + BM = DN \quad \Leftrightarrow \quad BD + BS = DN \quad \Leftrightarrow \quad DS = DN \,,$$

hvilket er sandt.

Så er

$$2(AQ + CM) = AD + AB - DB + BD + CB - DC = AD + AB + BC - DC$$

$$= AD + AB + BC - DA - AC = AB + BC - AC = 2a - 2b \,.$$

eller

$$AQ + CM = a - b \,.$$

Dermed er $AQ + CM$ uafhængig af valget af punktet D på AC.

Hvis $v = \angle BAC = \angle BCA$, ser vi i ΔO_1AQ, at $\angle O_1AQ = 90° - \frac{1}{2}v$, så

$$\tan\left(90° - \tfrac{1}{2}v\right) = \frac{r_1}{AQ} \,,$$

og i ΔO_2MC er

$$\tan\left(90° - \tfrac{1}{2}v\right) = \frac{r_2}{CM} \,.$$

Altså er

$$\tan\left(90° - \tfrac{1}{2}v\right) = \frac{r_1 + r_2}{AQ + CM} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{r_1 + r_2}{a - b} = \cot\tfrac{1}{2}v = \frac{\sin v}{1 - \cos v}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{r_1 + r_2}{a - b} = \frac{\frac{h}{a}}{1 - \frac{b}{a}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{r_1 + r_2}{a - b} = \frac{h}{a - b} \,.$$

Altså er $h = r_1 + r_2$.

3. metode **(Jens-Søren Andersen)**

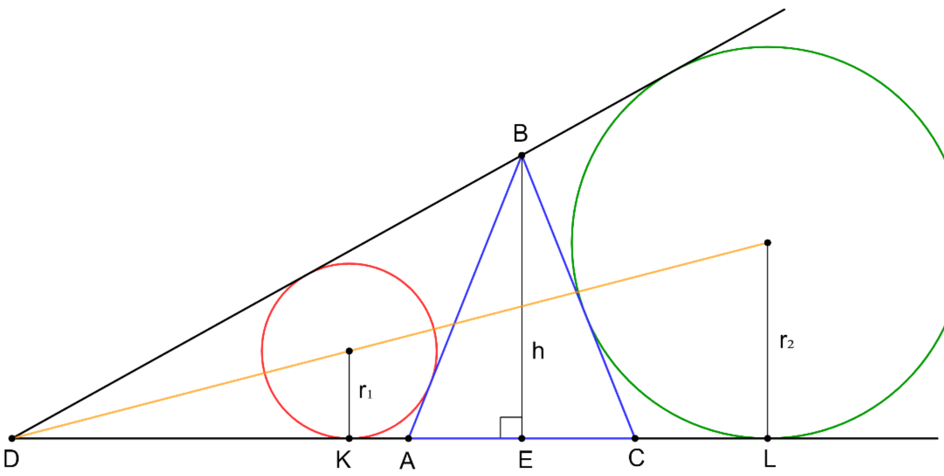
I en vilkårlig ΔABC gælder, at

$$\tan\tfrac{A}{2} = \frac{r_a}{s} \quad ,$$

Hvor r_a er radius i den ydre røringscirkel, der tangerer siden a og s er trekantens halve omkreds. Desuden gælder i en retvinklet ΔABC hvor C er ret, at

$$\tan\tfrac{A}{2} = \frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{\frac{a}{c}}{1+\frac{b}{c}} = \frac{a}{b+c} \ .$$

Lad nu s_1 og s_2 være den halve omkreds af ΔABD og ΔBCD og lad projektionerne af centrene for cirklerne med radier r_1 og r_2 på DC være K og L.



Nu er $DK = s_1 - AB$, så vi i ΔABD får

$$\tan\tfrac{D}{2} = \frac{r_1}{DK} = \frac{r_1}{s_1 - AB} \ .$$

I ΔBCD får vi

$$\tan\tfrac{D}{2} = \frac{r_2}{s_2} \quad ,$$

hvoraf

$$r_1 + r_2 = \tan\tfrac{D}{2}\cdot\left(s_1 - AB + s_2\right) \ . \tag{5}$$

Nu er

$$s_1 = \tfrac{1}{2}(BD + DA + AB) \quad , \quad s_2 = \tfrac{1}{2}(CD + BC + BD) \ ,$$

og idet $BC = AB$ giver dette

$$s_1 + s_2 - AB = \tfrac{1}{2}(2BD + 2AB + DA + CD) - AB = BD + AB + \tfrac{1}{2}(DA + CD) - AB$$

$$= BD + \tfrac{1}{2}(DA + CA + AD) = BD + DA + \tfrac{1}{2}CA = BD + DA + AE = BD + DE \ .$$

Af (5) får vi så

$$r_1 + r_2 = \tan\tfrac{D}{2}\cdot\left(BD + DE\right) \ . \tag{6}$$

Da ΔBED er retvinklet gælder efter bemærkningen oven for, at

$$\tan\tfrac{D}{2} = \frac{BE}{BD+DE} \quad \Leftrightarrow \quad \tan\tfrac{D}{2}\cdot\left(BD+DE\right) = BE\,,$$

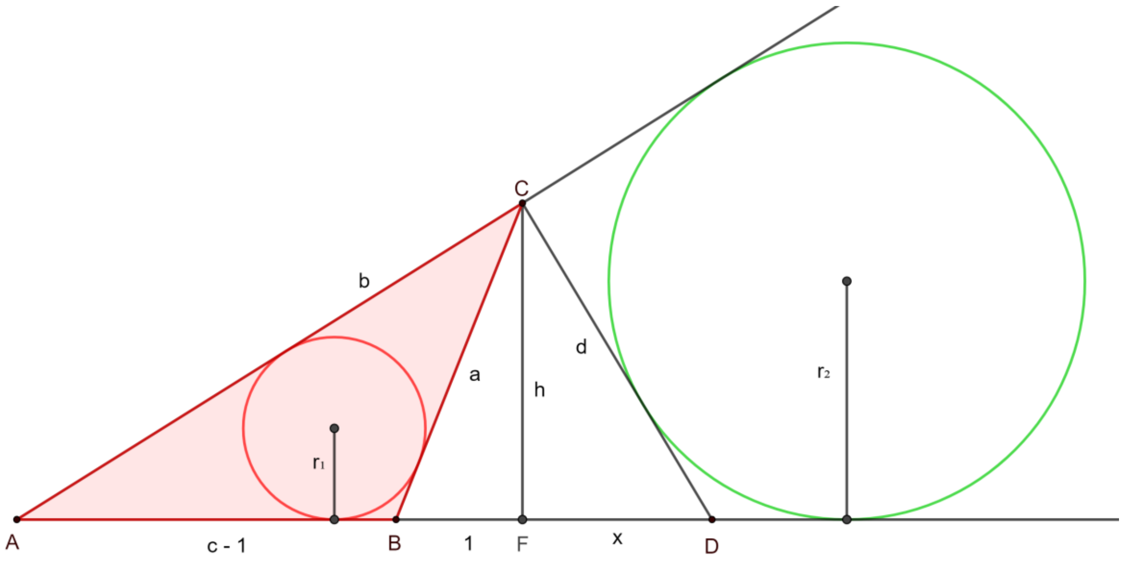
så (6) giver

$$r_1 + r_2 = BE = h\,.$$

Bemærkning

Walther Janous, Innsbruck, viser en udvidelse, nemlig følgende:

I ΔABC er B stump. Højden fra C er $h = CF$ og radius i trekantens indskrevne cirkel er r_1. Punktet D ligger på forlængelsen af AB ud over B og radius i den ydre røringscirkel i ΔADC på siden CD er r_2. Da er $r_1 + r_2 = h$ netop hvis ΔBCD er ligebenet med $CB = CD$.



Lad $FD = x$, $BC = a$, $AC = b$ og $AF = c$. Vi kan sætte $BF = 1$, så $AB = c - 1$. Hvis s er den halve omkreds af ΔABC, er

$$[\Delta ABC] = r_1 \cdot s\,,$$

hvoraf

$$r_1 = \frac{2[\Delta ABC]}{2s} = \frac{h\cdot(c-1)}{a+b+c-1}\,.$$

I ΔACD sætter vi $CD = d$. I ΔACD er r_2 radius i den ydre røringscirkel over for A, så efter en kendt formel er

$$r_2 = \frac{[\Delta ACD]}{s_1 - d}\,,$$

hvor s_1 er den halve omkreds:

$$2s_1 = c + x + b + d\,,$$

så vi får

$$r_2 = \frac{2[\Delta ACD]}{2s_1 - 2d} = \frac{(c+x)\cdot h}{c+x+b+d-2d} = \frac{(c+x)\cdot h}{c+x+b-d}\,.$$

Derfor er

$$r_1 + r_2 = h \quad \Leftrightarrow \quad \frac{h(c-1)}{a+b+c-1} + \frac{h(c+x)}{c+x+b-d} = h$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{c-1}{a+b+c-1} + \frac{c+x}{c+x+b-d} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{ab-ad+b^2-bd-c^2-cx+c+x}{(a+b+c-1)(c+x+b-d)} = 0 \tag{7}$$

$$\Leftrightarrow \quad ab - ad + b^2 - bd - c^2 - cx + c + x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d(a+b) = ab + b^2 - c^2 - cx + c + x$$

$$\Leftrightarrow \quad d = \frac{ab+b^2-c^2+c(1-x)+x}{a+b} \; .$$

I ΔACF, ΔCBF og ΔCFD er

$$h^2 = b^2 - c^2 \quad , \quad h^2 = a^2 - 1 \quad , \quad h^2 = d^2 - x^2 \; . \tag{8}$$

Heraf fås

$$d^2 = x^2 + h^2 = x^2 + b^2 - c^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + b^2 - c^2 = \left(\frac{ab+b^2-c^2+c(1-x)+x}{a+b}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + b^2 - c^2 - \left(\frac{ab+b^2-c^2+c(1-x)+x}{a+b}\right)^2 = 0 \; .$$

Flittig brug af algebra giver, at dette er ensbetydende med, at

$$a^2(c+x) + 2ab(1-x) - b^2(c+x-2) + (c-1)^2(c+x) = 0 \; ,$$

hvilket giver

$$x = \frac{a^2c + 2ab + b^2(2-c) + c(c-1)^2}{a^2 + 2ab + b^2 - (c-1)^2} \; . \tag{9}$$

Efter (8) er

$$b^2 - c^2 = a^2 - 1 \quad \text{eller} \quad b^2 = a^2 + c^2 - 1 \; . \tag{10}$$

Ved brug heraf reduceres bade tæller og nævner i (9) til

$$2ab + 2a^2 + 2c - 2 \; .$$

Dermed er $x = 1$, så $FD = BF$ og ΔCBD er ligebenet.

Hvis omvendt $x = 1$, er $d = a$, så vi af (1) får

$$\frac{c-1}{a+b+c-1} + \frac{c+x}{c+x+b-d} = \frac{c-1}{a+b+c-1} + \frac{c+1}{c+1+b-d}$$

$$= \frac{(c-1)(c+1+b-a) + (c+1)(a+b+c-1)}{(b+c+(a-1))(b+c-(a-1))} = \frac{2c^2 + 2bc + 2a - 2}{(b+c)^2 - (a-1)^2}$$

$$= \frac{2c^2 + 2bc + 2a - 2}{b^2 + c^2 + 2bc - a^2 - 1 + 2a} = \frac{2c^2 + 2bc + 2a - 2}{a^2 + c^2 - 1 + c^2 + 2bc - a^2 - 1 + 2a} = 1 \; .$$

Her har vi ved det sidste lighedstegn brugt (10).

Dermed er beviset ført.

Besvarelser modtaget fra:

- Jens-Søren Andersen
- Roger Bengtsson
- Hans Benner
- Walther Janous
- Hans Mortensen
- Jan Erik Pedersen
- Palle Bak Petersen.