Svar på sommeropgave (2021)

Opgave:

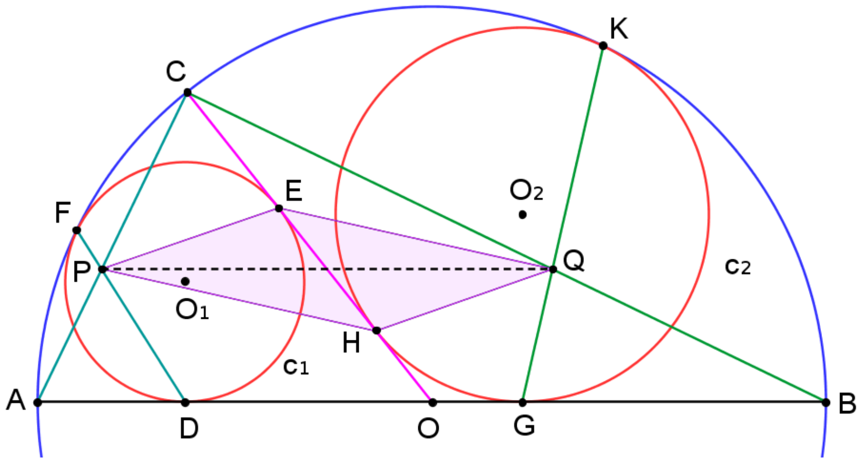
I Δ*ABC* er $C = 90°$ og midtpunktet af hypotenusen *AB* er *O*, som er centrum for den omskrevne cirkel.

En cirkel c_1 med centrum O_1 er indskrevet i cirkeludsnittet *OAC* og tangerer *OA*, *OC* og buen $\overset{\frown}{AC}$ i *D*, *E* og *F*.

En cirkel c_2 med centrum O_2 er indskrevet i cirkeludsnittet *OBC* og tangerer *OB*, *OC* og buen $\overset{\frown}{BC}$ i *G*, *H* og *K*.

Linjestykkerne *AC* og *DF* skærer hinanden i *P*, og linjestykkerne *GK* og *BC* skærer hinanden i *Q*.

Vis, at □*PEQH* er et parallelogram og at *PQ* || *AB*.



Redaktøren kender ikke løsningen på denne opgave, men håber, at de forstandige og erfarne opgaveløsere i løbet af sommeren vil tænke over den og kan sende en (helst) smuk euklidisk løsning.

Besvarelse:

Følgende løsning stammer fra Jens-Søren Andersen, Esbjerg.

Vi sætter radius i trekantens omskrevne cirkel til 1 og lader r_1 og r_2 være radier i c_1 og c_2. Punkterne O_2 og *K* ligger på vinkelhalveringslinjen til $\angle BOC$.
Vi ser, at ΔOAC er ligebenet, så $\angle AOC = 180° - 2A$ og dermed $\angle BOC = 2A$ og $\angle BOO_2 = \angle BOK = A$.

Da $O_2G \perp OB$, får vi i ΔO_2OG, at

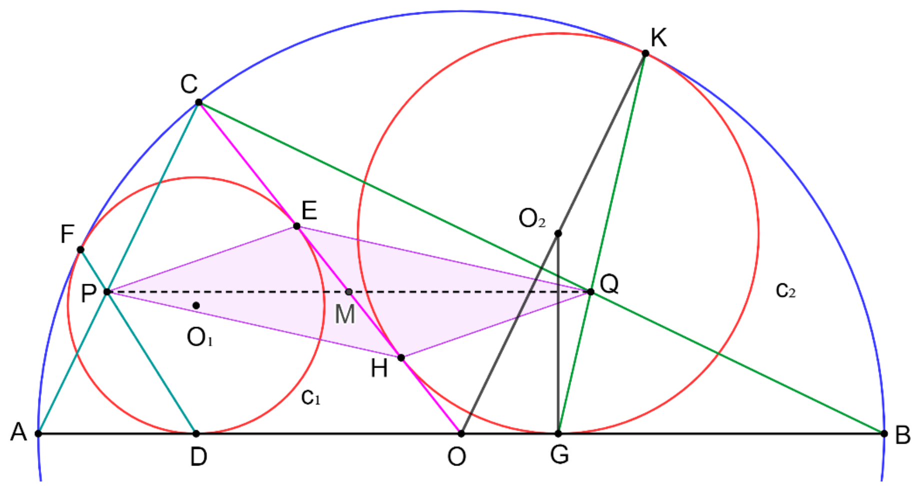
$$OO_2 = OK - O_2K = 1 - r_2 = 1 - O_2G = 1 - OO_2 \cdot \sin \angle GOO_2 = 1 - OO_2 \cdot \sin A.$$

Dermed er

$$OO_2 = 1 - OO_2 \cdot \sin A \quad \Leftrightarrow \quad OO_2 = \frac{1}{1+\sin A}\ .$$

På samme måde fås i den anden side af figuren, at

$$OO_1 = \frac{1}{1+\sin B} = \frac{1}{1+\cos A}\ .$$



Desuden giver ΔO_2OG, at

$$OH = OG = OO_2 \cdot \cos A = \frac{\cos A}{1+\sin A}\ ,$$

og tilsvarende

$$OE = OD = OO_1 \cdot \cos B = \frac{\cos B}{1+\cos A} = \frac{\sin A}{1+\cos A}\ .$$

Lad nu M være midtpunkt af EH. Så er

$$OM = \frac{1}{2}(OE + OH) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin A}{1+\cos A} + \frac{\cos A}{1+\sin A}\right)$$

$$= \frac{\sin A + \sin^2 A + \cos A + \cos^2 A}{2(1+\cos A)(1+\sin A)} = \frac{\sin A + \cos A + 1}{2(1+\cos A)(1+\sin A)}\ .$$

Nu er $\angle OO_2G = 90° - A$ og dermed $\angle GO_2K = 90° + A$. Da ΔKO_2G er ligebenet, er så

$$\angle O_2GK = \angle O_2KG = 45° - \tfrac{1}{2}A$$

og derfor

$$\angle BGK = \angle O_2GB - \angle O_2GK = 90° - \left(45° - \tfrac{1}{2}A\right) = 45° + \tfrac{1}{2}A\ .$$

I ΔBGQ fås, at

$$\angle BQG = 180° - \angle BGQ - \angle GBQ = 180° - \left(45° + \tfrac{1}{2}A\right) - B$$

$$= 135° - \tfrac{1}{2}A - (90° - A) = 45° + \tfrac{1}{2}A.$$

Dermed er $\angle BGQ = \angle BQG$, så ΔBGQ er ligebenet og $BG = BQ$.

Vi får, at

$$\frac{BQ}{BC} = \frac{BG}{BC} = \frac{1-OG}{2\sin A} = \frac{1-\frac{\cos A}{1+\sin A}}{2\sin A} = \frac{1+\sin A-\cos A}{2\sin A(1+\sin A)},$$

og desuden er som nævnt oven for

$$\frac{OM}{OC} = \frac{OM}{1} = OM = \frac{\sin A+\cos A+1}{2(1+\cos A)(1+\sin A)}.$$

Vi viser, at Q deler BC i samme forhold som M deler OC:

$$\frac{BQ}{BC} = \frac{OM}{OC} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+\sin A-\cos A}{2\sin A(1+\sin A)} = \frac{\sin A+\cos A+1}{2(1+\cos A)(1+\sin A)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1+\sin A-\cos A}{\sin A} = \frac{\sin A+\cos A+1}{1+\cos A}.$$

Ved at gange over kors fås efter en smule algebra, at denne ligning er ensbetydende med

$$1 - \cos^2 A = \sin^2 A,$$

hvilket er sandt.

Dermed er vist, at MQ er paralleltransversal i ΔOBC, så $MQ \parallel AB$. På samme måde ser vi, at PM er paralleltransversal i ΔOAC, så $MP \parallel AB$. Altså ligger P, M og Q på linje, og $PQ \parallel AB$.
Da desuden CO er median i ΔABC, er M midtpunkt af PQ.
Da M desuden er midtpunkt af EH, halverer diagonalerne hinanden i □$PEQH$, som altså er et parallelogram.

Punkterne E og H falder sammen i det udartede tilfælde, at ΔABC er ligebenet med $A = B = 45°$.

Besvarelser modtaget fra:

- Jens-Søren Andersen
- Jan Erik Pedersen.