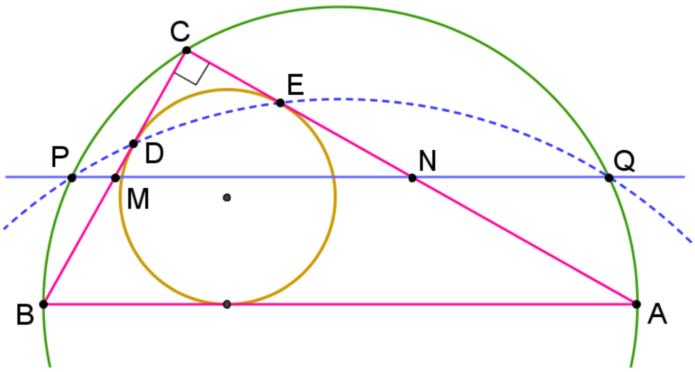
Svar på opgave 378 (Marts 2021)

Opgave:

Vi véd alt om den retvinklede trekant. Eller gør vi?

ΔABC er retvinklet, og $C = 90°$. Punkterne M og N er midtpunkter af kateterne BC og AC. Linjen MN skærer den omskrevne cirkel i P og Q og den indskrevne cirkel tangerer kateterne BC og AC i D og E.

Vis, at P, D, E og Q ligger på en cirkel.



Besvarelse:

1. metode:

Lad O og I være centrer for den om- og indskrevne cirkel. Linjen CI går gennem midtpunktet K af buen AB i den omskrevne cirkel, som ikke indeholder C. Desuden er L det diametralt modsatte punkt til K. Den indskrevne cirkel har radius r, og $CD = CE = r$.

Enhver cirkel gennem D med centrum på CK går også gennem E (fordi CK er midtnormal til DE) og enhver cirkel gennem P med centrum på LK går også gennem Q (fordi LK er midtnormal til PQ). Hvis $PK = EK$, vil en cirkel gennem P med centrum i K gå gennem E, D og Q. Altså ønsker vi at vise, at $PK = EK$.

Vi sætter $v = \angle CKO$ og lader h være højden fra C på AB. Vi kan antage, at radius i den omskrevne cirkel er 1. I den retvinklede ΔKLC er

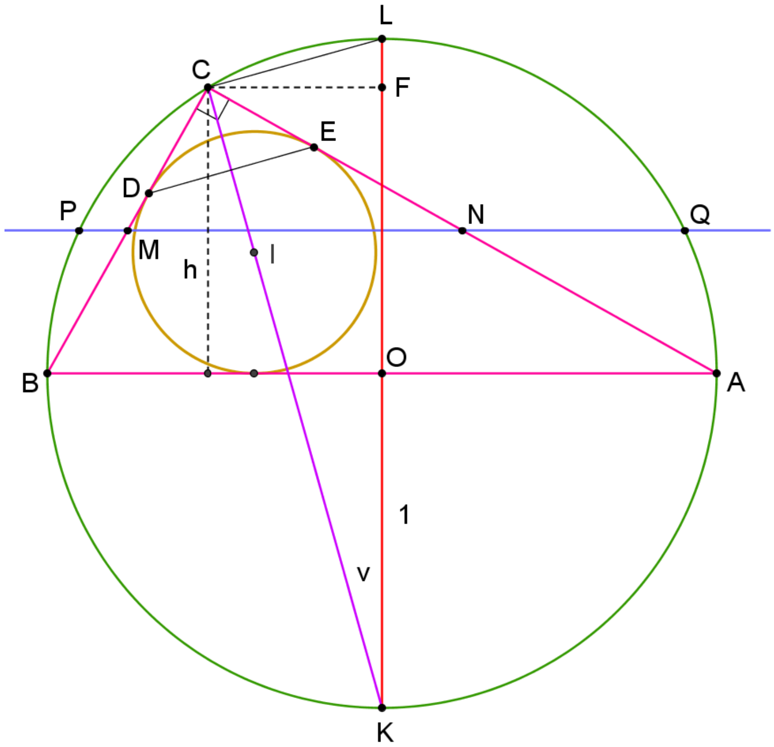
$$\cos v = \frac{KC}{KL} \quad \Leftrightarrow \quad KC = KL \cdot \cos v = 2\cos v \, .$$

Hvis projektionen af C på KL er F får vi, at

$$KF = KO + OF = 1 + h\ ,$$

så vi i ΔKFC får

$$\cos v = \frac{KF}{KC} = \frac{1+h}{2\cos v}\ . \tag{1}$$



Nu er $CE = r$ og $\angle ECK = 45°$, så cosinusrelationen i ΔECK giver

$$EK^2 = KC^2 + CE^2 - 2 \cdot KC \cdot CE \cdot \cos\angle ECK$$

$$= 4\cos^2 v + r^2 - 2 \cdot 2\cos v \cdot r \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ = \left(\sqrt{2}\cos v - r\right)^2 + 2\cos^2 v\ . \tag{2}$$

Lige store periferivinkler i trekantens omskrevne cirkel giver, at

$$\angle CKB = \angle IKB = A\ ,$$

og da $\angle ABK = 45°$, er

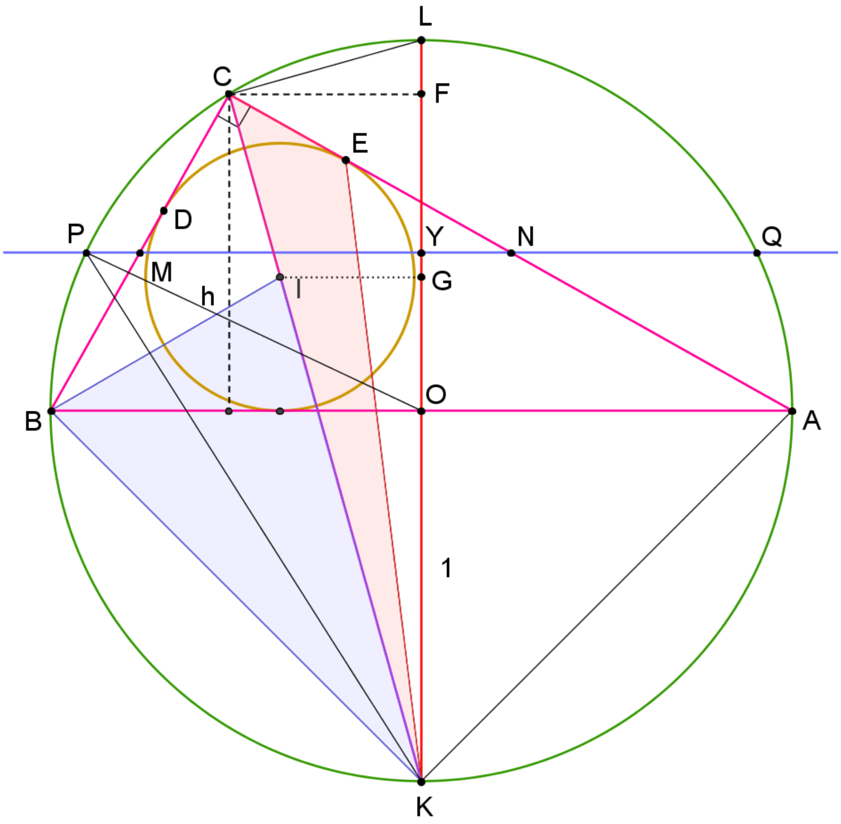
$$\angle IBK = \angle IBA + \angle ABK = \tfrac{1}{2}B + 45°.\ .$$

I ΔBIK er så

$$\angle BIK = 180° - \angle IBK - \angle IKB = 180° - 45° - \tfrac{1}{2}B - A$$

$$= A + B + C - 45° - \tfrac{1}{2}B - A = B + 90° - 45° - \tfrac{1}{2}B = 45° + \tfrac{1}{2}B\ .$$

Da altså $\angle IBK = \angle BIK$, er ΔBIK ligebenet og $KB = KI$.



Lad G være projektionen af I på KL. Så er

$$KG = KO + OG = 1 + r\ ,$$

så vi i ΔKIG får

$$\cos v = \frac{KG}{KI} = \frac{1+r}{KB} = \frac{1+r}{\sqrt{2}}\ .$$

Altså er

$$\sqrt{2}\cos v - r = 1\ .$$

Dette indsættes i (2), så vi får

$$EK^2 = 1 + 2\cos^2 v\ \ ,$$

og af (1) fås

$$1 + h = 2\cos^2 v\ ,$$

så $EK^2 = 2 + h$.

Lad nu KL skære PQ i Y. Så er

$$KY = KO + OY = 1 + \tfrac{1}{2}h\ \ .$$

Af de retvinklede trekanter PYK og PYO fås

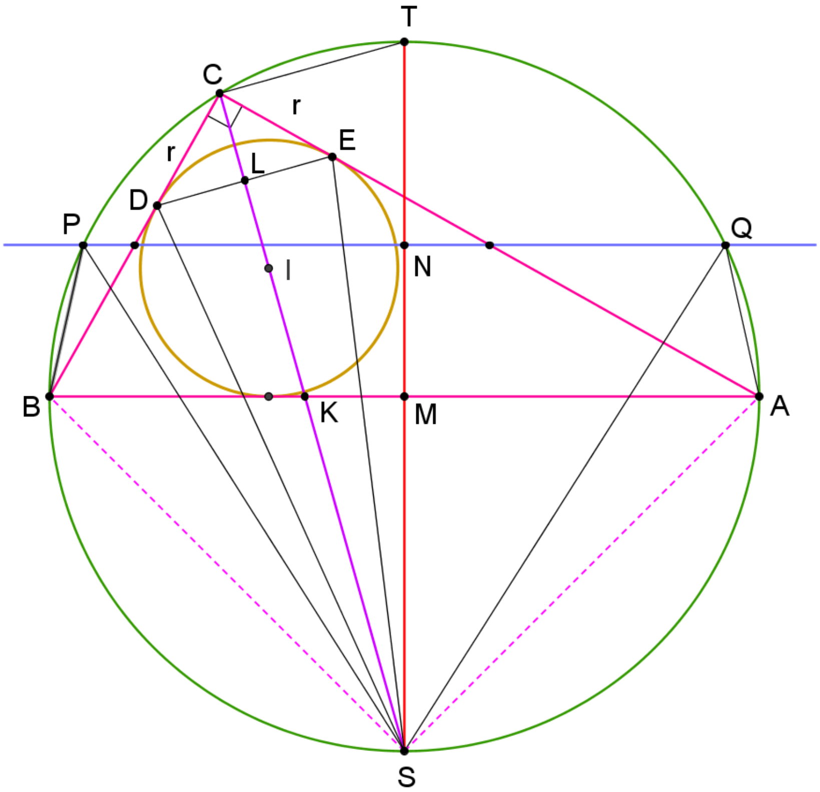
$$PK^2 = PY^2 + KY^2 = (PO^2 - OY^2) + KY^2 = \left(1-\tfrac{1}{4}h^2\right)+\left(1+\tfrac{1}{2}h\right)^2 = 2+h\ .$$

Da dermed $PK^2 = EK^2$ er det ønskede vist.

2. metode (Walther Janous, Innsbruck):

Da ΔCDE er ligebenet og retvinklet ($CD = CE = r$), er vinkelhalveringslinjen for C vinkelret på DE og den skærer den omskrevne cirkel for ΔABC i midtpunktet S af buen AB.
Vi har derfor, at $SD = SE$.
Nu er $PQ \parallel AB$, så $\square ABPQ$ er et ligebenet trapez, så S ligger på trapezets symmetriakse, dvs. $SP = SQ$.

Vi skal derfor vise, at $SD = SP$, og dette sker ved at bestemme længden af disse to linjestykker.



Vi bestemmer først SD. Lad SC skære AB i K og DE i L. Så er

$$CL = LD = \frac{r}{\sqrt{2}} .$$

Den omskrevne cirkels radius er $\frac{1}{2}c$, så $AS = BS = \frac{c}{2}\sqrt{2}$, og Ptolemæus' sætning i den indskrivelige $\square ASBC$ giver

$$AC \cdot BS + BC \cdot AS = CS \cdot AB \quad \Leftrightarrow \quad b \cdot \tfrac{c}{2}\sqrt{2} + a \cdot \tfrac{c}{2}\sqrt{2} = CS \cdot c$$

$$\Leftrightarrow \quad CS = \frac{a+b}{\sqrt{2}} .$$

Pythagoras i ΔDLS giver

$$SD^2 = DL^2 + LS^2 = \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 + (CS - CL)^2 = \frac{1}{2}r^2 + \left(CS - \frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 = r^2 + CS^2 - \sqrt{2} \cdot r \cdot CS .$$

Idet

$$CS = \frac{a+b}{\sqrt{2}} \quad \text{og} \quad r = \tfrac{1}{2}(a + b - c) \ ,$$

får vi

$$SD^2 = \frac{(a+b-c)^2}{4} + \frac{(a+b)^2}{2} - \frac{\sqrt{2}\,(a+b-c)}{2} \cdot \frac{a+b}{\sqrt{2}} \ ,$$

og en række trælse algebraiske omformninger giver

$$SD^2 = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + ab) \ .$$

Derefter ser vi på SP. Lad N og M være midtpunkter af PQ og AB og lad h være længden af højden fra C på AB. Kordesætningen giver

$$PN \cdot NQ = TN \cdot NS \quad \Leftrightarrow \quad PN^2 = TN \cdot NS$$

hvoraf

$$PN^2 = (TS - NS) \cdot NS = (c - NM - MS) \cdot (NM + MS)$$
$$= \left(c - \tfrac{h}{2} - \tfrac{c}{2}\right) \cdot \left(\tfrac{h}{2} + \tfrac{c}{2}\right) = \left(\tfrac{c}{2} - \tfrac{h}{2}\right) \cdot \left(\tfrac{h}{2} + \tfrac{c}{2}\right) = \tfrac{1}{4}(c^2 - h^2) \ .$$

Pythagoras i ΔPNS giver

$$SP^2 = PN^2 + SN^2 = \tfrac{1}{4}(c^2 - h^2) + (SM + MN)^2 = \tfrac{1}{4}(c^2 - h^2) + \left(\tfrac{c}{2} + \tfrac{h}{2}\right)^2$$
$$= \tfrac{1}{4}(2c^2 + 2ch) = \frac{a^2 + b^2 + ch}{2} = \frac{a^2 + b^2 + ab}{2} \ .$$

Dermed er $SD^2 = SP^2$ eller $SD = SP$, hvilket er det ønskede.

Besvarelser modtaget fra:

- Jens-Søren Andersen
- Roger Bengtsson
- Hans Benner
- Walther Janous
- Hans Mortensen
- Jan Erik Pedersen