Svar på opgave 376 (Januar 2021)

Opgave:

Tallet a er et naturligt tal.
Angiv antallet af ikke-negative hele løsninger til ligningen

$$\operatorname{int}\tfrac{x}{a} = \operatorname{int}\tfrac{x}{a+1} \ .$$

Besvarelse:

1. metode

Vi overvejer først, hvor mange ikke-negative hele løsninger, der findes til ligningssystemet

$$\operatorname{int}\tfrac{x}{a} = n \quad , \quad \operatorname{int}\tfrac{x}{a+1} = n \ ,$$

hvor n er et forelagt ikke-negativt tal. Vi har, at

$$n \le \tfrac{x}{a} < n+1 \quad \text{eller} \quad na \le x < (n+1)a \tag{1}$$

og at

$$n \le \tfrac{x}{a+1} < n+1 \quad \text{eller} \quad n(a+1) \le x < (n+1)(a+1) \ . \tag{2}$$

Hvis begge ligninger er opfyldt, altså hvis

$$\operatorname{int}\tfrac{x}{a} = \operatorname{int}\tfrac{x}{a+1} = n \ ,$$

skal x ligge i begge de nævnte intervaller (1) og (2), og da

$$na < n(a+1) < (n+1)a < (n+1)(a+1) \ ,$$

gælder

$$n(a+1) \le x < (n+1)a \quad \text{eller} \quad na + n \le x < na + a \ .$$

Dette interval indeholder $a - n$ forskellige hele positive tal x, når $n < a$. Hvis $n \ge a$ findes ingen x, idet så $na + n \ge na + a$.

Til forskellige værdier af n får vi forskellige løsninger. Hvis $n_1 < n_2$ og x_1 og x_2 er løsninger hørende til henholdsvis n_1 og n_2, gælder efter ovenstående:

$$x_1 < n_1a + a = (n_1 + 1)a \le n_2a < n_2a + n_2 \le x_2 \ ,$$

så $x_1 \ne x_2$. Vi skal altså lægge antallet af løsninger sammen for $n = 0, 1, 2, \dots, a$. Derfor er antallet af løsninger

$$\sum_{n=0}^{a-1}(a-n) = a + (a-1) + (a-2) + \cdots + 2 + 1 = \tfrac{1}{2}a(a+1) \ .$$

***2. metode* (Walther Janous, Innsbruck)**

Vi kan skrive x på formen

$$x = a(a + 1)t + r\ ,$$

hvor r og t er hele tal og

$$t \geq 0\ ,\quad 0 \leq r < a(a + 1)\ . \tag{1}$$

Så kan ligningen omskrives således:

$$\operatorname{int}\frac{a(a+1)t+r}{a} = \operatorname{int}\frac{a(a+1)t+r}{a+1} \quad \Leftrightarrow \quad (a+1)t + \operatorname{int}\frac{r}{a} = at + \operatorname{int}\frac{r}{a+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{int}\frac{r}{a+1} - \operatorname{int}\frac{r}{a} = t \geq 0\ . \tag{2}$$

Vi har, at

$$\frac{r}{a+1} < \frac{r}{a} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{int}\frac{r}{a+1} \leq \operatorname{int}\frac{r}{a}\ ,$$

og efter (2) er

$$\operatorname{int}\frac{r}{a+1} \geq \operatorname{int}\frac{r}{a}\ ,$$

så vi får

$$\operatorname{int}\frac{r}{a+1} = \operatorname{int}\frac{r}{a}\ . \tag{3}$$

Efter (1) er

$$0 \leq \frac{r}{a+1} < a \quad \text{og} \quad 0 \leq \frac{r}{a} < a+1\ .$$

De to brøker $\frac{r}{a+1}$ og $\frac{r}{a}$ ligger efter (3) i samme heltalsinterval blandt intervallerne

$$[0;1[\ , [1;2[\ , \ldots , [a - 1\ ; a[\ \ ,$$

så

$$k \leq \frac{r}{a+1} \leq \frac{r}{a} < k+1 \quad \text{for} \quad \mathrm{k} = 0, 1\ , \ldots , a-1\ \ .$$

Altså gælder

$$k \leq \frac{r}{a+1} \ \wedge\ \frac{r}{a} < k+1 \quad \Leftrightarrow \quad (a+1)k \leq r < a(k+1)\ .$$

Antallet af værdier for r er derfor

$$(k + 1)a - k(a + 1) = a - k\ ,$$

og antallet af løsninger til ligningen er dermed

$$\sum_{k=0}^{a-1}(a-k) = a + (a-1) + (a-2) + \cdots + 2 + 1 = \tfrac{1}{2}a(a+1)$$

3. metode **(Klaus Grünbaum)**

For nemheds skyld ser vi på ligningen for a = 25:

$$\operatorname{int}\frac{x}{25} = \operatorname{int}\frac{x}{26}\ \ .$$

Hvis x er en hel positiv løsning, gælder efter den sædvanlige divisionsligning

$$x = q\cdot 26 + r\ \ ,\quad 0 \leq r \leq 25\ \ ,\ q \geq 0.$$

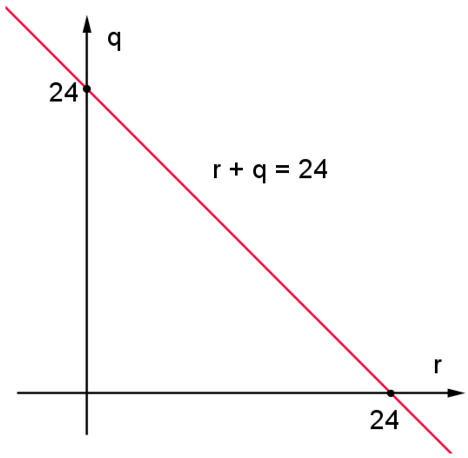
Ligningen får så udseendet

$$\operatorname{int}\frac{q\cdot 26+r}{25}=\operatorname{int}\frac{q\cdot 26+r}{26} \quad\Leftrightarrow\quad \operatorname{int}\left(q+\frac{q+r}{25}\right)=\operatorname{int}\left(q+\frac{r}{26}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad \operatorname{int}\frac{q+r}{25}=\operatorname{int}\frac{r}{26} \quad\Leftrightarrow\quad \operatorname{int}\frac{q+r}{25}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 0\le q+r\le 24\,.$$

Hver løsning bestemmer entydigt q og r, så an- tallet af løsninger er antallet af løsninger (q,r) til uligheden $0 \le q + r \le 24$. Dette er antallet af gitterpunkter, der ligger i 1. kvadrant eller på q-aksen eller på r-aksen i et (r,q)-koordinatsystem, altså

$$\tfrac{1}{2}\cdot 25\cdot 26.$$



Argumentet kan naturligvis gennemføres i almindelighed, så vi får et antal løsninger på

$$\tfrac{1}{2}a(a+1).$$

Bemærkning. Ligningen

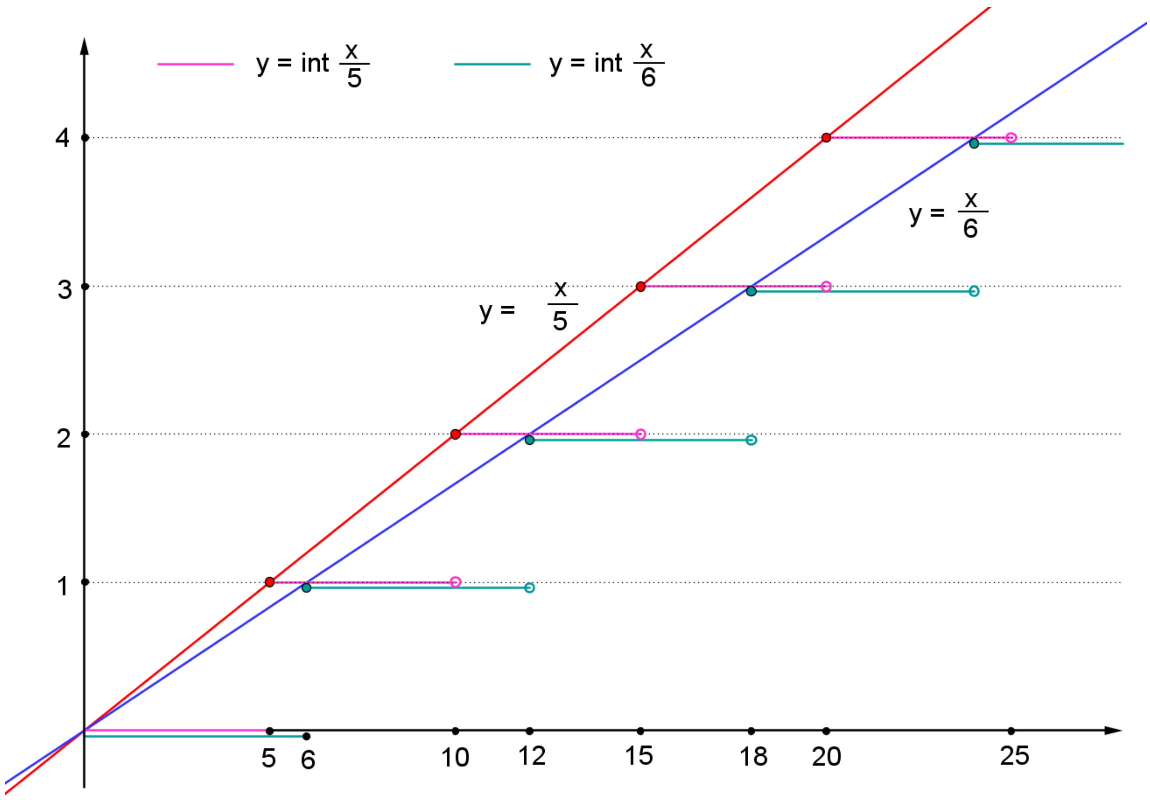
$$\operatorname{int}\tfrac{x}{5} = \operatorname{int}\tfrac{x}{6}$$

har $\tfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 6 = 15$ løsninger, nemlig

$$0, 1, 2, 3, 4 \quad , \quad 6, 7, 8, 9 \quad , \quad 12, 13, 14 \quad , \quad 18, 19 \quad , \quad 24\ .$$

Den måde, løsningerne er grupperet på, fremgår af de grafiske billeder af funktionerne

$$y = \operatorname{int}\tfrac{x}{5} \quad \text{og} \quad y = \operatorname{int}\tfrac{x}{6}\ .$$



Bemærkning. Vi ser på ligningen

$$\operatorname{int}\frac{x}{a} = \operatorname{int}\frac{x}{a+2} \ .$$

Vi har, at

$$\operatorname{int}\frac{x}{a} = \operatorname{int}\frac{x}{a+2} = 0$$

netop hvis x = 1, 2, 3, . . . , a - 1, dvs. vi har her a - 1 løsninger.

Ligningen $\operatorname{int}\frac{x}{a} = \operatorname{int}\frac{x}{a+2} = 1$ har løsningerne

$$x = a + 2 \ , \ a + 3 \ , \ \ . \ . \ . \ , 2a - 1 \ ,$$

altså a - 2 løsninger.

Ligningen $\operatorname{int}\frac{x}{a} = \operatorname{int}\frac{x}{a+2} = k$ har løsningerne

$$x = (a + 2)k \ , \ (a + 2)k + 1 \ , \ . \ . \ . \ , \ (a + 2)k + (a - 1 - 2k) = ak + a - 1 \ ,$$

i alt a - 2k løsninger. Antallet af løsninger er ikke 0, hvis

$$ak + a - 1 \ \geq \ (a + 2)k \quad \Leftrightarrow \quad a - 1 \ \geq \ 2k \quad \Leftrightarrow \quad k \leq \tfrac{1}{2}(a-1).$$

Derfor er det samlede antal løsninger til den givne ligning

$$a - 1 + a - 2 + a - 4 + \cdots = a - 1 + \sum_{k=1}^{c}(a - 2k)$$

$$= a - 1 + ca - \sum_{k=1}^{c} 2k = a - 1 + ca - 2(1 + 2 + \cdots + c) = a - 1 + ac - c(c+1) \ ,$$

hvor c = $\frac{a-1}{2}$ hvis a er ulige og c = $\frac{a}{2} - 1$ hvis a er lige.

Hvis a er ulige, fås antallet af løsninger til

$$a - 1 + a \cdot \tfrac{a-1}{2} - \tfrac{a-1}{2} \cdot \tfrac{a+1}{2} = \tfrac{1}{4}(a-1)(a+3) \ ,$$

og hvis a er lige fås antallet til

$$a - 1 + a \cdot \tfrac{a-2}{2} - \tfrac{a-2}{2} \cdot \tfrac{a}{2} = \tfrac{1}{4}a(a+2) - 1 \ .$$

De to tilfælde kan efter lidt pusleri skrives samlet sådan:

$$\tfrac{1}{4}\left(a^2 + 2a - 3\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}(-1)^a\right) \ .$$

Besvarelser modtaget fra:

- Jens-Søren Andersen
- Hans Benner
- Klaus Grünbaum
- Walther Janous
- Hans Mortensen
- Asger Olesen
- Jørgen Olesen
- Jan Erik Pedersen
- Johs. M. Christensen