Svar på opgave 375 (December 2020)

Opgave:

a. Vis, at der for reelle positive tal *a*, *b* og *c* gælder

$$\frac{ab+c^2}{a+b}+\frac{bc+a^2}{b+c}+\frac{ca+b^2}{c+a}\geq a+b+c\ .$$

$$\frac{a+b}{ab+c^2}+\frac{b+c}{bc+a^2}+\frac{c+a}{ca+b^2}\leq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

b. Vis, at der for reelle tal *x*, *y* og *z* i intervallet]0;1] gælder

$$\frac{x}{1+y+zx}+\frac{y}{1+z+xy}+\frac{z}{1+x+yz}\leq \frac{3}{x+y+z}\ .$$

Besvarelse:

Den første opgave i a. er allerede stillet som opgave 309 (april 2014). Vi bringer her nogle anderledes løsninger.

a.

I.

1. metode
Vi kaster os ud i brutal bogstavregning:

$$\frac{ab+c^2}{a+b}-c+\frac{bc+a^2}{b+c}-a+\frac{ca+b^2}{c+a}-b$$

$$=\frac{ab+c^2-ac-bc}{a+b}+\frac{a^2+bc-ab-ac}{b+c}+\frac{b^2+ca-bc-ba}{c+a}$$

$$=\frac{(c-a)(c-b)}{a+b}+\frac{(a-b)(a-c)}{b+c}+\frac{(b-a)(b-c)}{c+a}$$

$$=\frac{(c^2-a^2)(c^2-b^2)+(a^2-b^2)(a^2-c^2)+(b^2-a^2)(b^2-c^2)}{(a+b)b+c)(c+a)}$$

$$=\frac{a^4+b^4+c^4-b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 0\ .$$

Lighedstegn gælder netop hvis $a=b=c$.

2. metode (Palle Bak Petersen, Hillerød)
Vi sætter

$$u=b+c\quad ,\quad v=c+a\quad ,\quad w=a+b\ .$$

Løsning af dette ligningssystem giver

$$a = \tfrac{1}{2}(v+w-u) \quad , \quad b = \tfrac{1}{2}(u+w-v) \quad , \quad c = \tfrac{1}{2}(u+v-w)\ .$$

Vi får

$$uv = (b+c)(c+a) = ab + c^2 + c(a+b)\ ,$$
$$vw = (c+a)(a+b) = bc + a^2 + a(b+c)\ ,$$
$$uw = (b+c)(a+b) = ca + b^2 + b(a+c)\ .$$

Dette indsættes, så venstre side af ulighedstegnet får udseendet

$$\frac{ab+c^2}{a+b}+\frac{bc+a^2}{b+c}+\frac{ca+b^2}{c+a}=\frac{uv-c(a+b)}{a+b}+\frac{vw-a(b+c)}{b+c}+\frac{uw-b(a+c)}{a+c}$$
$$=\frac{uv}{w}-c+\frac{vw}{u}-a+\frac{uw}{v}-b=\frac{uv}{w}+\frac{vw}{u}+\frac{uw}{v}-(a+b+c)$$
$$=\frac{uv}{w}+\frac{vw}{u}+\frac{uw}{v}-\frac{1}{2}(u+v+w)\ \ .$$

Vi skal derfor vise, at

$$\frac{uv}{w}+\frac{vw}{u}+\frac{uw}{v}-\frac{1}{2}(u+v+w) \geq \frac{1}{2}(u+v+w)$$

eller at

$$\frac{uv}{w}+\frac{vw}{u}+\frac{uw}{v} \geq u+v+w\ . \tag{1}$$

Hvis vi sætter

$$x=\sqrt{\frac{uv}{w}} \quad , \quad y=\sqrt{\frac{vw}{u}} \quad , \quad z=\sqrt{\frac{uw}{v}}\ \ ,$$

fås

$$xy=\sqrt{\frac{uv}{w}\cdot\frac{vw}{u}}=v \quad , \quad yz=w \quad , \quad xz=u\ ,$$

så (1) er ensbetydende med

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+xz$$
$$\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}(x^2-2xy+y^2)+\tfrac{1}{2}(x^2-2xz+z^2)+\tfrac{1}{2}(y^2-2yz+z^2) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}(x-y)^2+\tfrac{1}{2}(x-z)^2+\tfrac{1}{2}(y-z)^2 \geq 0\ ,$$

hvilket er sandt.

3. metode (Walther Janous, Innsbruck)
Vi har, at

$$\frac{ab+c^2}{a+b}-\frac{a+b}{2}=\frac{2ab+2c^2-a^2-b^2-2ab}{2(a+b)}$$
$$=\frac{2c^2-2b^2}{2(a+b)}-\frac{a^2-b^2}{2(a+b)}=\frac{c^2-b^2}{a+b}-\frac{a-b}{2}\ .$$

Tilsvarende er

$$\frac{bc+a^2}{b+c}-\frac{b+c}{2}=\frac{a^2-c^2}{b+c}-\frac{b-c}{2} \quad , \quad \frac{ca+b^2}{c+a}-\frac{c+a}{2}=\frac{b^2-a^2}{c+a}-\frac{c-a}{2}\ .$$

Addition giver

$$\frac{ab+c^2}{a+b}+\frac{bc+a^2}{b+c}+\frac{ca+b^2}{c+a}-(a+b+c)=\frac{c^2-b^2}{a+b}+\frac{a^2-c^2}{b+c}+\frac{b^2-a^2}{c+a}\ .$$

Altså skal vi vise, at

$$\frac{c^2-b^2}{a+b}+\frac{a^2-c^2}{b+c}+\frac{b^2-a^2}{c+a}\geq 0\ .$$

Denne ulighed er ensbetydende med

$$\frac{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2}{(a+b)(a+c)(b+c)}\geq 0\ ,$$

og da tælleren kan omskrives til

$$\tfrac{1}{2}\left((a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2\right),$$

er uligheden opfyldt.

4. metode (Hans Benner, Randers)
Uligheden omskrives til

$$\frac{c^2}{a+b}+\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}\geq a-\frac{ab}{a+b}+b-\frac{bc}{b+c}+c-\frac{ca}{c+a}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{c^2}{a+b}+\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}\geq\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\ .$$

Vi minder om *permutationsuligheden*:
Hvis $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ og $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ og $(p_1,p_2, . . . , p_n)$ er en vilkårlig permutation af $(b_1,b_2, . . . , b_n)$, er

$$a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1\leq a_1p_1+a_2p_2+\cdots+a_np_n\leq a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\ .$$

Vi kan i denne opgave uden indskrænkning antage, at $a \leq b \leq c$. Så er

$$a^2 \leq b^2 \leq c^2$$

og

$$b + c \geq a + c \geq a + b \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{b+c}\leq\frac{1}{a+c}\leq\frac{1}{a+b}\ .$$

Benyttes permutationsuligheden på disse to talrækker med tre elementer i hver, fås

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\leq\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\ ,$$

hvilket netop er det ønskede.

II.

1. metode (Asger Olesen, Tønder)
Vi ganger med fællesnævneren for samtlige brøker på begge sider af ulighedstegnet, dvs. vi ganger med

$$abc(ab + c^2)(bc + a^2)(ca + b^2)\ ,$$

så uligheden er ensbetydende med

$$abc(bc + a^2)(ca + b^2)(a+b) + abc(ab + c^2)(ca + b^2)(b + c) + abc(ab + c^2)(bc + a^2)(c + a)$$
$$\leq (ab + c^2)(bc + a^2)(ca + b^2)(bc + ac + ab)$$

Efter et veritabelt orgie af algebra kan dette reducers til

$$a^4b^2c^2 + a^2b^4c^2 + a^2b^2c^4 \leq a^4b^4 + b^4c^4 + a^4c^4$$

$$\Leftrightarrow \quad a^4b^4 + b^4c^4 + a^4c^4 - a^4b^2c^2 - a^2b^4c^2 - a^2b^2c^4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}\left((a^2b^2 - b^2c^2)^2 + (b^2c^2 - a^2c^2)^2 + (a^2c^2 - a^2b^2)^2\right) \geq 0$$

hvilket er sandt.

2. metode (Walther Janous, Innsbruck)
Vi får, at

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2} - \frac{a+b}{ab+c^2} = \frac{1}{2a} - \frac{1}{2b} + \frac{2}{2b} - \frac{a+b}{ab+c^2}$$

$$= \frac{1}{2a} - \frac{1}{2b} + \frac{2(ab+c^2) - 2b(a+b)}{2b(ab+c^2)} = \frac{1}{2a} - \frac{1}{2b} + \frac{c^2-b^2}{b(ab+c^2)} \; .$$

På samme måde er

$$\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{2} - \frac{b+c}{bc+a^2} = \frac{1}{2b} - \frac{1}{2c} + \frac{a^2-c^2}{c(bc+a^2)} \;,$$

$$\frac{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}{2} - \frac{c+a}{ca+b^2} = \frac{1}{2c} - \frac{1}{2a} + \frac{b^2-a^2}{a(ac+b^2)} \; .$$

Ved addition fås

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \left(\frac{a+b}{ab+c^2} + \frac{b+c}{bc+a^2} + \frac{c+a}{ca+b^2}\right) = \frac{c^2-b^2}{b(ab+c^2)} + \frac{a^2-c^2}{c(bc+a^2)} + \frac{b^2-a^2}{a(ca+b^2)} \; .$$

Vi skal derfor vise, at

$$\frac{c^2-b^2}{b(ab+c^2)} + \frac{a^2-c^2}{c(bc+a^2)} + \frac{b^2-a^2}{a(ca+b^2)} \geq 0 \; .$$

Denne ulighed er ensbetydende med

$$\frac{a^4b^4 + a^4c^4 + b^4c^4 - a^4b^2c^2 - a^2b^4c^2 - a^2b^2c^4}{abc(a^2+bc)(b^2+ac)(c^2+ab)} \geq 0.$$

Tælleren omformes til

$$\tfrac{1}{2}\left(a^4(b^2-c^2)^2 + b^4(c^2-a^2)^2 + c^4(a^2-b^2)^2\right) ,$$

og dermed er uligheden opfyldt.

b.

1. metode
Idet

$$1 + xy = (1 - x)(1 - y) + x + y$$

får vi

$$1 + z + xy = (1 - x)(1 - y) + x + y + z \geq x + y + z \; .$$

Tilsvarende er

$$1 + x + yz = (1 - y)(1 - z) + x + y + z \geq x + y + z$$

$$1 + y + zx = (1 - z)(1 - x) + x + y + z \geq x + y + z \,.$$

Dermed er

$$\frac{x}{1+y+zx}+\frac{y}{1+z+xy}+\frac{z}{1+x+yz}\leq\frac{x}{x+y+z}+\frac{y}{x+y+z}+\frac{z}{x+y+z}=1$$

og da $x + y + z \leq 3$ er

$$1\leq\frac{3}{x+y+z}\,,$$

så den givne ulighed er opfyldt.

2. metode (Walther Janous, Innsbruck)
Da $0 < x \leq 1$, er

$$x(x + y) \leq x + y \leq 1 + y\,,$$

hvoraf

$$x^2 + xy \leq 1 + y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + xy + zx \leq 1 + y + zx\,.$$

Altså er

$$\frac{x}{1+y+zx}\leq\frac{x}{x^2+xy+zx} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{1+y+zx}\leq\frac{1}{x+y+z}\,.$$

På samme måde er

$$\frac{y}{1+z+xy}\leq\frac{1}{x+y+z} \quad , \quad \frac{z}{1+x+yz}\leq\frac{1}{x+y+z}\,,$$

og ved addition af de sidste tre uligheder får vi, at

$$\frac{x}{1+y+zx}+\frac{y}{1+z+xy}+\frac{z}{1+x+yz}\leq\frac{3}{x+y+z}\,.$$

Besvarelser modtaget fra:

- Jens-Søren Andersen
- Hans Benner
- Walther Janous
- Asger Olesen
- Jørgen Olesen
- Palle Bak Petersen