Svar på opgave 374 (November 2020)

Opgave:

Trigonometri i trekanten er ikke altid let.

Vis, at der i en spidsvinklet ΔABC gælder, at

$$\frac{\cos A}{\cos(B-C)}+\frac{\cos B}{\cos(C-A)}+\frac{\cos C}{\cos(A-B)}\geq\frac{3}{2}\ .$$

Besvarelse:

1. metode

Vi har, at

$$\cos C = -\cos(A + B) = \sin A\cdot\sin B - \cos A\cdot\cos B$$

og

$$\cos(A - B) = \sin A\cdot\sin B + \cos A\cdot\cos B\ .$$

Den givne ulighed er dermed ensbetydende med

$$\frac{\sin B\cdot\sin C-\cos B\cdot\cos C}{\sin B\cdot\sin C+\cos B\cdot\cos C}+\frac{\sin C\cdot\sin A-\cos C\cdot\cos A}{\sin C\cdot\sin A+\cos C\cdot\cos A}+\frac{\sin A\cdot\sin B-\cos A\cdot\cos B}{\sin A\cdot\sin B+\cos A\cdot\cos B}\geq\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow\quad\frac{\tan B\cdot\tan C-1}{\tan B\cdot\tan C+1}+\frac{\tan C\cdot\tan A-1}{\tan C\cdot\tan A+1}+\frac{\tan A\cdot\tan B-1}{\tan A\cdot\tan B+1}\geq\frac{3}{2}\ .$$

Nu er det kendt (se neden for), at

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\cdot\tan B\cdot\tan C\ .$$

For nemheds skyld sætter vi

$$x = \tan A\ ,\ y = \tan B\ ,\ z = \tan C\ ,$$

så vi skal vise, at

$$\frac{yz-1}{yz+1}+\frac{zx-1}{zx+1}+\frac{xy-1}{xy+1}\geq\frac{3}{2}\ ,\qquad(1)$$

hvor x, y og z opfylder, at

$$x + y + z = xyz\ .\qquad(2)$$

I uligheden (1) forlænger vi brøkerne med x, y og z, så den er ensbetydende med

$$\frac{xyz-x}{xyz+x}+\frac{xyz-y}{xyz+y}+\frac{xyz-z}{xyz+z}\geq\frac{3}{2}\ .\qquad(3)$$

Vi sætter

$$a = xyz + x \quad , \quad b = xyz + y \quad , \quad c = xyz + z \ . \tag{4}$$

Så er

$$a + b + c = 3xyz + x + y + z = 4xyz \quad \text{så} \quad xyz = \tfrac{1}{4}(a + b + c) \ .$$

Vi benytter (2), så ligningssystemet (4) kan skrives således:

$$a = 2x + y + z \ , \ b = x + 2y + z \ , \ c = x + y + 2z \ .$$

Dette system løses med hensyn til x, y og z, og vi får

$$x = \tfrac{1}{4}(3a - b - c) \ , \ y = \tfrac{1}{4}(3b - a - c) \ , \ z = \tfrac{1}{4}(3c - a - b) \ .$$

Så er

$$xyz - x = x + y + z - x = y + z = \tfrac{1}{2}(b + c - a)$$

$$xyz - y = x + z = \tfrac{1}{2}(a + c - b)$$

$$xyz - z = x + y = \tfrac{1}{2}(a + b - c) \ .$$

Dermed kan uligheden (3) omskrives således:

$$\frac{\frac{1}{2}(b+c-a)}{a} + \frac{\frac{1}{2}(a+c-b)}{b} + \frac{\frac{1}{2}(a+b-c)}{c} \geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{a} - 1 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} - 1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} - 1\right) \geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) - 3 \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) \geq 6 \quad .$$

Dette er sandt, idet hver af parenteserne er mindst 2.

Bemærkning

Vi viser formlen

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$$

ved på dels at bemærke, at

$$\tan(A + B) = \tan(180° - C) = -\tan C \ ,$$

dels at bruge additionsformlen

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} \ ,$$

så vi får

$$-\tan C = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} \quad \Leftrightarrow \quad -\tan C + \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C = \tan A + \tan B \ ,$$

og dette er ensbetydende med det ønskede.

***2. metode* (Asger Olesen, Tønder).**

Vi viser først formlen

$$b\cdot\cos B + c\cdot\cos C = a\cdot\cos(B - C)$$

og de analoge, som gælder i enhver trekant. Vi benytter sinusrelationen

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\ ,$$

hvor R er radius i den omskrevne cirkel. Desuden benytter vi, at

$$\sin u + \sin v = 2\sin\tfrac{u+v}{2}\cdot\cos\tfrac{u-v}{2}\ .$$

Vi får

$$b\cdot\cos B + c\cdot\cos C = 2R\cdot\sin B\cdot\cos B + 2R\cdot\sin C\cdot\cos C = R(\sin 2B + \sin 2C)$$

$$= 2R\cdot\sin(B + C)\ \cdot\cos(B - C) = 2R\cdot\sin(180° - A)\cdot\cos(B - C)$$

$$= 2R\cdot\sin A\cdot\cos(B - C) = a\cdot\cos(B - C)\ .$$

Dermed er

$$\frac{\cos A}{\cos(B-C)}+\frac{\cos B}{\cos(C-A)}+\frac{\cos C}{\cos(A-B)}=\frac{a\cdot\cos A}{a\cdot\cos(B-C)}+\frac{b\cdot\cos B}{b\cdot\cos(C-A)}+\frac{c\cdot\cos C}{c\cdot\cos(A-B)}$$

$$=\frac{a\cdot\cos A}{b\cdot\cos B+c\cdot\cos C}+\frac{b\cdot\cos B}{c\cdot\cos C+a\cdot\cos A}+\frac{c\cdot\cos C}{a\cdot\cos A+b\cdot\cos B}\ .$$

Vi sætter

$$x = a\cdot\cos A\ \ ,\ y = b\cdot\cos B\ ,\ z = c\cdot\cos C\ .$$

Da ΔABC er spidsvinklet, er x, y og z positive. Vi skal vise, at

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{3}{2}\ .$$

Denne ulighed er opfyldt, idet det er den kendte *Nesbitts ulighed*.

For god ordens skyld giver vi et par beviser for Nesbitts ulighed.

Bevis 1

Vi sætter

$$a = y + z\ \ ,\ \ b = z + x\ \ ,\ \ c = x + y\ ,$$

hvoraf

$$x=\tfrac{1}{2}(b+c-a)\ ,\ y=\tfrac{1}{2}(a+c-b)\ ,\ z=\tfrac{1}{2}(a+b-c)\ .$$

Dermed er

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=\frac{b+c-a}{2a}+\frac{a+c-b}{2b}+\frac{a+b-c}{2c}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}-1+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}-1+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}-1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)-\frac{3}{2}$$

$$\geq\tfrac{1}{2}\cdot 2+\tfrac{1}{2}\cdot 2+\tfrac{1}{2}\cdot 2-\tfrac{3}{2}=\tfrac{3}{2}.$$

Bevis 2

Vi udregner direkte

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}=\frac{ac+a^2+b^2+bc}{(b+c)(c+a)}+\frac{2c-3a-3b}{2(a+b)}$$

$$=\frac{2(a+b)(ac+a^2+b^2+bc)+(bc+ab+c^2+ac)(2c-3a-3b)}{2(a+b)(b+c)(c+a)}\ . \qquad (5)$$

Vi udregner tælleren t:

$$t = 2(a^3 + b^3 + c^3) - a^2c - ab^2 - a^2b - b^2c - ac^2 - bc^2$$

$$= (a^3 + b^3 - ab^2 - a^2b) + (a^3 + c^3 - a^2c - ac^2) + (b^3 + c^3 - b^2c - bc^2)$$

$$= (a - b)(a^2 - b^2) + (a - c)(a^2 - c^2) + (b - c)(b^2 - c^2)$$

$$= (a - b)^2(a + b) + (a - c)^2(a + c) + (b - c)^2(b + c) \geq 0\ .$$

Nu er både tæller og nævner i (5) ikke-negative, og dermed er

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}\geq 0.$$

Bevis 3

Da det aritmetiske middeltal er større end eller lig med det geometriske middel- tal for ikke-negative reelle tal, er

$$\frac{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{b^3}}{3}\geq\sqrt[3]{\sqrt{a^3}\cdot\sqrt{b^3}\cdot\sqrt{b^3}}\quad ,\quad \frac{\sqrt{a^3}+\sqrt{c^3}+\sqrt{c^3}}{3}\geq\sqrt[3]{\sqrt{a^3}\cdot\sqrt{c^3}\cdot\sqrt{c^3}}$$

eller

$$\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{b^3}\geq 3\sqrt{a}\cdot b\quad ,\quad \sqrt{a^3}+\sqrt{c^3}+\sqrt{c^3}\geq 3\sqrt{a}\cdot c\ .$$

Addition giver

$$2\left(\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3}\right)\geq 3\sqrt{a}\cdot(b+c)\quad\Leftrightarrow\quad 2a\left(\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3}\right)\geq 3a\sqrt{a}\cdot(b+c)$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{a}{b+c}\geq\frac{3a\sqrt{a}}{2\left(\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3}\right)}\ .$$

Tilsvarende er

$$\frac{b}{c+a}\geq\frac{3b\sqrt{b}}{2\left(\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3}\right)}\quad ,\quad \frac{c}{a+b}\geq\frac{3c\sqrt{c}}{2\left(\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3}\right)}\ .$$

Addition af de tre sidste uligheder giver

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}\cdot\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}}{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3}}=\frac{3}{2}\ .$$

3. metode

Vi giver et euklidisk bevis. Lad O være centrum for den omskrevne cirkel for ΔABC, H fodpunkt på BC for højden fra A og M midtpunkt af siden BC. En linje gen-nem A parallel med BC skærer cirklen i K og midtnormalen for BC skærer AK i N. Lad desuden AO, BO og CO skære BC, AC og AB i X, Y og Z.

Da □*AHMN* er et rektangel, er *AH* = *MN*. Da □*BCKA* er et indskriveligt trapez, er det ligebenet, så

$$\angle KBC = \angle ACB = C \ ,$$

og dermed

$$\angle ABK = B - C \ .$$

Buen *AK* har derfor gradtallet 2(*B* - *C*), hvilket medfører, at $\angle AON = B - C$. I den retvinklede Δ*ONA* er

$$ON = OA \cdot \cos \angle AON = OA \cdot \cos(B - C) \ .$$

Nu er $\angle BOM$ en centervinkel, der spænder over buen ½*BC*, så

$$\angle BOM = A \ ,$$

og derfor får vi i Δ*BOM*, at

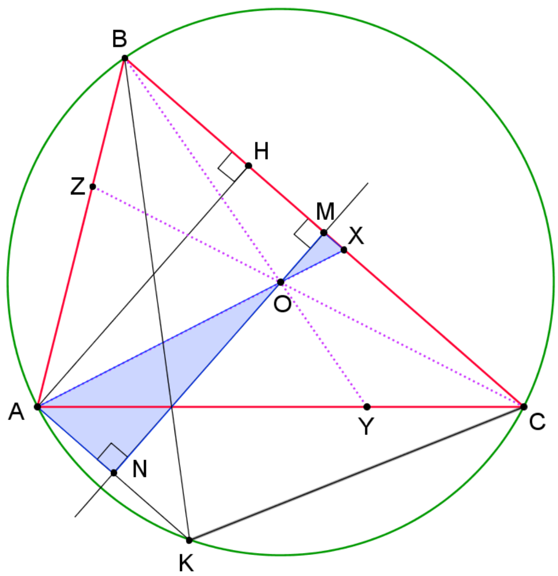
$$OM = OB \cdot \cos A \ .$$

Division giver

$\dfrac{OM}{ON} = \dfrac{OB \cdot \cos A}{OA \cdot \cos(B - C)} = \dfrac{\cos A}{\cos(B - C)}$ .Da $AK \parallel BC$,

er Δ*ANO* og Δ*XMO* ensvinklede, så

$$\frac{OM}{ON} = \frac{OX}{OA} \ .$$



Tilsvarende ræsonnement kan gennemføres for de øvrige sider i trekanten, så den givne ulighed er ensbetydende med

$$\frac{OX}{OA} + \frac{OY}{OB} + \frac{OZ}{OC} \geq \frac{3}{2} \ .$$

Lad nu *h* og *k* være de vinkelrette afstande fra *B* og *C* til linjen *AX*. Så gælder for arealerne

$$[\square ABOC] = [\Delta OAB] + [\Delta OAC] \ = \tfrac{1}{2} h \cdot OA + \tfrac{1}{2} k \cdot OA = \tfrac{1}{2} OA \cdot (h + k).$$

og

$$[\Delta ABC] = [\Delta AXC] + [\Delta AXB] = \tfrac{1}{2} k \cdot AX + \tfrac{1}{2} h \cdot AX = \tfrac{1}{2} AX \cdot (h + k) \ .$$

Dermed er

$$\frac{OA}{AX} = \frac{[\square ABOC]}{[\Delta ABC]} \ .$$

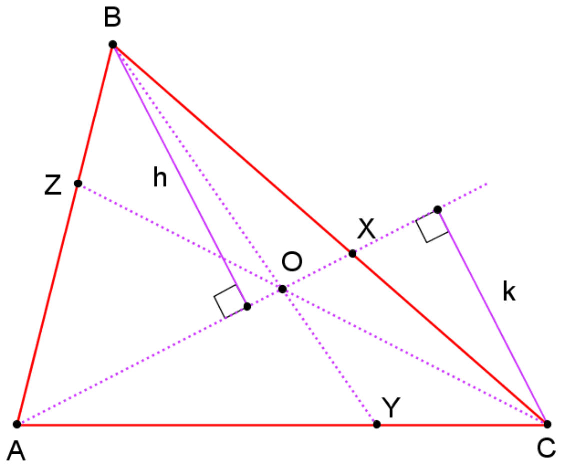
På samme måde er

$$\frac{OB}{BY}=\frac{[\square BCOA]}{[\Delta ABC]} \quad , \quad \frac{OC}{CZ}=\frac{[\square CAOB]}{[\Delta ABC]} \ ,$$

hvoraf

$$\frac{OA}{AX}+\frac{OB}{BY}+\frac{OC}{CZ}$$

$=\dfrac{[\square ABOC]+[\square BCOA]+[\square CAOB]}{[ABC]}=2$. Nu gælder for positive reelle tal p, q og r, at det aritmetiske middeltal er større end eller lig med det harmoniske, dvs.



$$\frac{p+q+r}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}} \qquad \text{eller}$$

$$\left(p+q+r\right)\left(\tfrac{1}{p}+\tfrac{1}{q}+\tfrac{1}{r}\right) \geq 9 \ .$$

Denne klassiske ulighed fås også ved brug at Cauchy-Schwarz' ulighed. Dermed er

$$\left(\frac{OA}{AX}+\frac{OB}{BY}+\frac{OC}{CZ}\right)\left(\frac{AX}{OA}+\frac{BY}{OB}+\frac{CZ}{OC}\right) \geq 9 \ . \tag{5}$$

Nu er

$$\frac{AX}{OA}=\frac{OA+OX}{OA}=1+\frac{OX}{OA} \ ,$$

og tilsvarende for de øvrige trekantsider, så (5) omskrives til

$$2\cdot\left(1+\frac{OX}{OA}+1+\frac{OY}{OB}+1+\frac{OZ}{OC}\right) \geq 9 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{OX}{OA}+\frac{OY}{OB}+\frac{OZ}{OC} \geq \frac{9}{2}-3=\frac{3}{2} \ .$$

Dette er netop det ønskede.

Bemærkning.

Vi nævner, at der i enhver trekant med sidelængder a, b og c gælder

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} < 2 \ .$$

Venstre ulighed er Nesbitts ulighed. Højre ulighed fås ved at benytte trekantuligheden

$$a+b>c \quad \Leftrightarrow \quad 2(a+b)>a+b+c \ ,$$

og tilsvarende

$$2(b+c)>a+b+c \quad , \quad 2(a+c)>a+b+c \ .$$

Så fås

$$\frac{a}{b+c}=\frac{2a}{2(b+c)}<\frac{2a}{a+b+c} \quad , \quad \frac{b}{c+a}<\frac{2b}{a+b+c} \quad , \quad \frac{c}{a+b}<\frac{2c}{a+b+c} \ .$$

Addition giver

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<\frac{2a+2b+2c}{a+b+c}=2\ .$$

Besvarelser modtaget fra:
- Jens-Søren Andersen
- Walther Janous
- Asger Olesen