Svar på opgave 373 (Oktober 2020)

Opgave:

Et par diofantiske ligninger kan vi vel altid klare?

a. Bestem alle sæt (x,y,z) af ikke-negative hele tal, så

$$2^x + 3^y = 5^z \ .$$

b. Bestem alle sæt (x,y,z) af ikke-negative hele tal, så

$$2^x + 3^y = 4^z \ .$$

Besvarelse:

a.

1. metode.
Vi deler op i tilfælde.

I. $x = 0$.

Vi får, at

$$1 + 3^y = 5^z \ ,$$

og modulo 4 er

$$1 + 3^y \equiv 1 + (-1)^y \pmod 4 \quad \text{og} \quad 5^z \equiv 1 \pmod 4 \ .$$

I dette tilfælde får vi derfor ingen løsning.

II. $y = 0$.

Her er

$$2^x + 1 = 5^z \ ,$$

og modulo 3 får vi

$$2^x + 1 \equiv (-1)^x + 1 \pmod 3 \quad \text{og} \quad 5^z \equiv (-1)^z \pmod 3).$$

Dermed er

$$(-1)^x + 1 \equiv (-1)^z \pmod 3).$$

Heraf slutter vi, at x er lige og z ulige. Vi sætter $x = 2p$, hvor p er et naturligt tal. Så er

$$2^{2p} + 1 = 5^z \ ,$$

så $p = 1$, $z = 1$ er en løsning, dvs. $(x,y,z) = (2,0,1)$ er en løsning.
Antag så at $p \geq 2$. Så er

$$2^{2p} + 1 = 5^z \quad \Leftrightarrow \quad 4^p + 1 = 5^z \ . \qquad (1)$$

Da z er ulige, er $z = 2q + 1$, og vi får

$$5^z = 5^{2q+1} = 5 \cdot 5^{2q} = 5 \cdot 25^q \equiv 5 \cdot 1^q \equiv 5 \pmod 8 ,$$

mens

$$4^p + 1 \equiv 1 \pmod 8 .$$

Altså er der ingen løsninger til (1) i dette tilfælde.

III. $x \geq 1, y \geq 1$.

Modulo 3 får vi

$$2^x + 3^y \equiv (-1)^x \pmod 3 \quad \text{og} \quad 5^z \equiv (-1)^z \pmod 3 ,$$

altså

$$(-1)^x \equiv (-1)^z \pmod 3 .$$

Dermed er x og z begge lige eller begge ulige.

IIIa. x og z er lige.

Vi sætter $x = 2p$ og $z = 2q$, så ligningen får udseendet

$$2^{2p} + 3^y = 5^{2q} \quad \Leftrightarrow \quad 3^y = 5^{2q} - 2^{2p} \quad \Leftrightarrow \quad 3^y = (5^q - 2^p)(5^q + 2^p) .$$

Vi slutter heraf, at begge parenteser er potenser af 3, altså

$$5^q - 2^p = 3^k \quad \text{og} \quad 5^q + 2^p = 3^m ,$$

hvor $k + m = y$ og $m > k$. Ved subtraktion fås

$$3^m - 3^k = (5^q + 2^p) - (5^q - 2^p) = 2^{p+1} \quad \Leftrightarrow \quad 2^{p+1} = 3^k(3^{m-k} - 1) .$$

Heraf følger $k = 0$ og dermed $m = y$, så vi får

$$2^{p+1} = 3^y - 1 . \tag{2}$$

Modulo 4 giver dette

$$0 \equiv 2^{p+1} \equiv (-1)^y - 1 \pmod 4 ,$$

så y er lige. Vi sætter $y = 2r$ og får af (2), at

$$2^{p+1} = 3^{2r} - 1 = (3^r - 1)(3^r + 1) . \tag{3}$$

To tal med forskel 2 har et produkt, der er en potens af to, så de to tal må være 2 og 4, dvs.

$$3^r - 1 = 2 \quad \text{og} \quad 3^r + 1 = 4 ,$$

så $r = 1$. Så er $y = 2r = 2$ og af (3) fås, at $2^{p+1} = 8$, så $p = 2$ og $x = 2p = 4$. Ligninger ser nu sådan ud:

$$2^4 + 3^2 = 5^z \quad \Leftrightarrow \quad z = 2 ,$$

så vi har fundet løsningen $(x,y,z) = (4,2,2)$.

IIIb. x og z er ulige.

Vi ser på ligningen modulo 5 og får

$$2^x = 2^{2p+1} = 4^p \cdot 2 \equiv (-1)^p \cdot 2 \pmod 5$$

så

$$2^x \equiv 2 \pmod 5 \quad \text{eller} \quad 2^x \equiv -2 \equiv 3 \pmod 5 .$$

Vi deler op efter pariteten af y.

1. y er lige.

Vi får, at

$$3^y = 3^{2q} = 9^q \equiv (-1)^q \pmod 5$$

hvoraf

$$3^y \equiv 1 \pmod 5 \quad \text{eller} \quad 3^y \equiv -1 \equiv 4 \pmod 5 .$$

Dermed har vi mulighederne for $2^x + 3^y$:

$$2^x + 3^y \equiv : \; 2+1 \; , \; 2+4 \; , \; 3+1 \; , \; 3+4 \quad (\text{mod } 5)$$

eller

$$2^x + 3^y \equiv : \; 3 \; , \; 6 \equiv 1 \; , \; 4 \; , \; 7 \equiv 2 \quad (\text{mod } 5) .$$

Derfor er $2^x + 3^y$ ikke delelig med 5, men 5^z er delelig med 5. Derfor kan y ikke være lige.

2. *y* er ulige.

2A. *x* = 1.

Så får ligningen udseendet

$$2 + 3^y = 5^z ,$$

så $(x,y,z) = (1,1,1)$ er en løsning. Hvis $y > 1$ og $z > 1$ er

$$5^z = 2 + 3^y \equiv 2 \pmod 9 ,$$

og vi får tabellen:

z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 . . .
5^z (mod 9)	5	7	8	4	2	1	5	7	8	4	2 . . .

Potenserne af 5 giver altså resten 2 ved division med 9 for z = 5, 11, 16, …, dvs. vi har, at $z \equiv 5$ (mod 6) eller $z = 5 + 6k$.
Derefter regner vi modulo 7 og får

$$5^z = 5^{6k+5} = 5^5 \cdot 5^{6k} \equiv 25^2 \cdot 5 \cdot 5^{6k} \equiv 4^2 \cdot 5 \cdot (-2)^{6k}$$

$$\equiv 2 \cdot 5 \cdot 2^{6k} \equiv 3 \cdot 2^{6k} \equiv 3 \cdot (8^2)^k \equiv 3 \cdot 1^k \equiv 3 \pmod 7 .$$

Altså er

$$2 + 3^y \equiv 3 \pmod 7 \quad \Leftrightarrow \quad 3^y \equiv 1 \pmod 7 .$$

Dette giver $y \equiv 0$ (mod 6), hvilket er umuligt, da y er ulige.

2B. *x* ≥ 3.

Idet y er ulige får vi modulo 4

$$2^x + 3^y \equiv 0 + (-1)^y = -1 \pmod 4 \quad \text{og} \quad 5^z \equiv 1 \pmod 4 ,$$

så vi får ingen løsninger.

Nu er alle tilfælde udtømt, og vi har fundet løsningerne

$$(x,y,z) \; : \; (2,0,1) \; , \; (4,2,2) \; , \; (1,1,1) .$$

Vi har altså

$$2^2 + 3^0 = 5^1 \quad , \quad 2^4 + 3^2 = 5^2 \quad , \quad 2^1 + 3^1 = 5^1 .$$

2. metode (Con Amore Problemgruppe, Birkerød).

Lad (x,y,z) være en løsning.
Vi bemærker, at $x \neq 0$. Thi hvis $x = 0$, ville

$$1 + 3^y = 5^z ,$$

hvor venstre side er lige, mens højre er ulige. Vi deler derefter op i tilfælde.

I. $x \geq 3$. Vi regner modulo 8 og får

$$2^x + 3^y \equiv 3^y \pmod 8 \quad \text{og} \quad 5^z \equiv (-3)^z \pmod 8 .$$

Altså er

$$3^y \equiv (-3)^z \pmod 8 .$$

Hvis y er lige og z er ulige, er $3^y \equiv 1 \pmod 8$ og $(-3)^z \equiv 5 \pmod 8$.

Hvis y er ulige og z er ulige, er $3^y \equiv 3 \pmod 8$ og $(-3)^z \equiv 5 \pmod 8$.

Hvis y er ulige og z er lige, er $3^y \equiv 3 \pmod 8$ og $(-3)^z \equiv 1 \pmod 8$.

Derfor er både y og z lige. Vi kan sætte $y = 2a$ og $z = 2b$, hvor $a, b \geq 0$. Så er

$$2^x = 5^z - 3^y = 5^{2b} - 2^{2a} = (5^b - 3^a)(5^b + 3^a) . \tag{1}$$

Vi slutter, at de to parenteser begge er potenser af 2. Vi kan sætte $5^b - 3^a = 2^s$, hvor $s > 0$. Så får vi

$$5^b + 3^a = 5^b + 3^a + 2 \cdot 3^a = 2^s + 2 \cdot 3^a = 2(2^{s-1} + 3^a) .$$

Nu er 3^a ulige for alle $a \geq 0$, hvilket medfører, at $2^{s-1} + 3^a$ er ulige, hvis $s > 1$. Dette er umuligt, fordi $2^{s-1} + 3^a$ som nævnt er en potens af 2. Altså må $s = 1$, så

$$2^{s-1} + 3^a = 1 + 3^a .$$

Dette er en potens af 2 for $a = 0$ og for $a = 1$. For $a \geq 2$ er $1 + 3^a > 8$, og modulo 8 får vi

$$1 + 3^a \equiv 1 + 1 = 2 \pmod 8 \ \text{ for } a \text{ lige} \quad , \quad 1 + 3^a \equiv 1 + 3 = 4 \pmod 8 \ \text{ for } a \text{ ulige} .$$

Dermed går 8 ikke op i $1 + 3^a$ for $a \geq 2$. Derfor har vi kun mulighederne $a = 0$ og $a = 1$.
Hvis $a = 0$ og $s = 1$, får vi

$$2 = 2^s = 5^b - 3^a = 5^b - 1 ,$$

hvilket tydeligvis er umuligt.
Den eneste mulighed er dermed $a = 1$ og $s = 1$. Så er

$$2 = 2^s = 5^b - 3^a = 5^b - 3 ,$$

hvoraf $b = 1$. Dette medfører, at $y = 2a = 2$ og $z = 2b = 2$, så ligningen får udseendet

$$2^x + 3^2 = 5^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2^x + 9 = 25 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4 .$$

Talsættet $(x,y,z) = (4,2,2)$ er dermed en løsning.

II. $x = 1$. Så er

$$2 + 3^y = 5^z ,$$

hvor $(x,y,z) = (1,1,1)$ er en løsning. Der findes ikke andre løsninger, thi efter (1) er

$$2 = (5^b - 3^a)(5^b + 3^a) ,$$

som ikke har nogen løsninger i a og b.

III. $x = 2$. Her er

$$4 + 3^y = 5^z \ ,$$

hvor $(x,y,z) = (2,0,1)$ er en løsning.
Hvis $y \geq 1$, er $3^y \equiv 3 \pmod 6$ og dermed

$$1 \equiv 4 + 3 \equiv 4 + 3^y = 5^z \equiv (-1)^z \pmod 6 \ . \qquad (2)$$

Så må z være lige, og vi sætter $z = 2b$, hvor $b \geq 1$.
Hvis y er lige, sætter vi $y = 2p$, så

$$4 + 3^y \equiv 4 + 3^{2p} = 4 + 9^p \equiv 5 \pmod 8 \ .$$

Hvis y er ulige, er $y = 2k + 1$, så

$$4 + 3^y = 4 + 3^{2k} \cdot 3 = 4 + 9^k \cdot 3 \equiv 4 + 3 = 7 \pmod 8 \ .$$

I (2) har vi imidlertid

$$5^z = 5^{2b} = 25^b \equiv 1 \pmod 8$$

Der findes altså i tilfælde III kun løsningen $(x,y,z) = (2,0,1)$.
De eneste løsninger til ligningen er dermed

$$(x,y,z) \ : \ (1,1,1) \ , (2,0,1) \ , (4,2,2) \ .$$

b.
1. metode.

Vi omskriver ligningen til

$$3^y = 2^{2z} - 2^x \ . \qquad (1)$$

Da $3^y > 0$, er $2z > x$, så $z \neq 0$. Hvis desuden $x \neq 0$, er højre side af lighedstegnet i (1) lige, mens venstre side er ulige. Altså må $x = 0$, så vi får

$$3^y = 2^{2z} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3^y = (2^z - 1)(2^z + 1) \ .$$

Da $2^z + 1$ og $2^z - 1$ ikke begge er delelige med 3 (fordi deres forskel er 2), må der gælde, at $2^z - 1 = 1$, dvs. $z = 1$. Eneste løsning er derfor $(x,y,z) = (0,1,1)$.

2. metode (Con Amore Problemgruppe, Birkerød).

Lad (x,y,z) være en løsning. Hvis
$x \geq 1$, er venstre side ulige. Tallet 4^z er ulige kun for $z = 0$, så $4^z = 1$. Altså er

$$2^x + 3^y = 1 \ ,$$

som ikke har nogen ikke-negative hele løsninger.
Vi slutter heraf, at $x = 0$ og $z \geq 1$.
Der gælder, at

$$1 + 3^y \equiv 1 + (-1)^y \equiv 4^z \equiv 0 \pmod 4 \quad \text{så at} \quad 3^y \equiv -1 \equiv 3 \pmod 4 \ .$$

Heraf slutter vi, at y er ulige.
Hvis $y = 1$, er

$$2^x + 3^y = 2^0 + 3^1 = 4 \ ,$$

så $z = 1$. Dermed er $(x,y,z) = (0,1,1)$ en løsning.
Hvis $y > 1$, sætter vi $y = 2a + 1$ for et naturligt tal a. Antag først, at z er lige, dvs. $z = 2b$. Så er

$$3^{2a+1} = 4^{2b} - 2^0 \quad \Leftrightarrow \quad 3^{2a+1} = (4^b - 1)(4^b + 1)\ .$$

Her går 3 op i $4^b - 1$ og i 3^{2a+1}. Men 3 går ikke op i $4^b + 1$, fordi forskellen på de to faktorer på højre side er 2. Derfor har ligningen ingen løsning, hvis z er lige.
Altså er z ulige, og vi kan sætte $z = 2b + 1$. Så er

$$2^x + 3^y = 4^z \quad \Leftrightarrow \quad 1 + 3^{2a+1} = 4^{2b+1} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + 3\cdot 9^a = 4\cdot 16^b\ .$$

Vi får

$$1 + 3\cdot 9^a \equiv 1 + 3\cdot 1^a = 4 \pmod 8$$

mens

$$4\cdot 16^b \equiv 0 \pmod 8\ .$$

Dermed findes kun løsningen $(x,y,z) = (0,1,1)$.

Bemærkning.
Vi husker opgave 199b (April 2003), hvor man skulle bestemme samtlige positive hele talsæt (x,y,z), der opfylder

$$3^x + 4^y = 5^z\ .$$

Den eneste løsning er det velkendte pythagoræiske talsæt, der opnås for $(x,y,z) = (2,2,2)$.
I øvrigt er $(x,y,z) = (0,1,1)$ en løsning, og $(x,y,z) = (1,\frac{1}{2},1)$ en 'pæn' rational løsning.

Besvarelser modtaget fra:
- Jens-Søren Andersen
- Hans Kaas Benner
- Klaus Grünbaum
- Walther Janous
- Asger Olesen
- Palle Bak Petersen
- Con Amore Problemgruppe