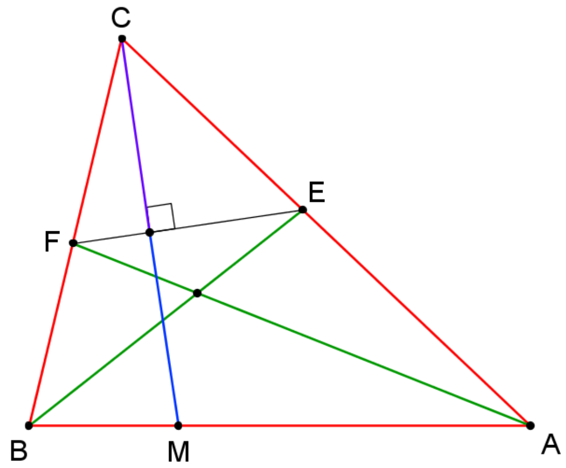
Svar på opgave 372 (September 2020)

Opgave:

Vinkelhalveringslinjerne i trekanter med en vinkel på 60° har interessante egenskaber.

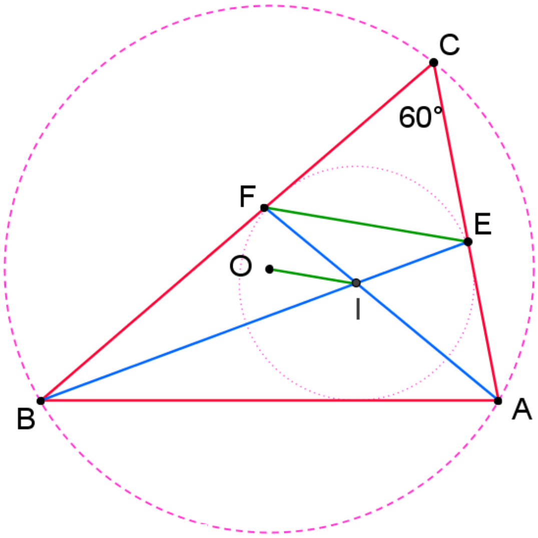
a. I ΔABC er $C = 60°$ og AF og BE er vinkelhalveringslinjer for vinklerne A og B.

Vis, at spejlbilledet M af C i EF ligger på BA.



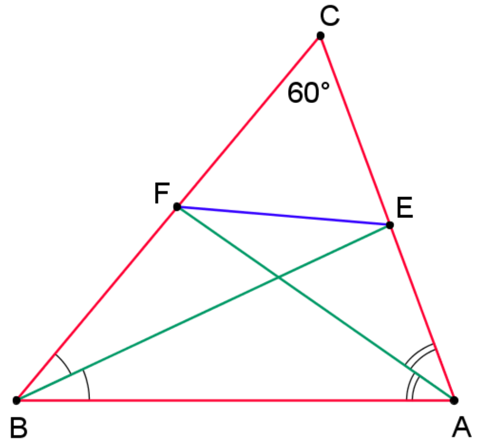
b. I ΔABC er $C = 60°$ og AF og BE er vinkelhalveringslinjer for A og B.
Centrer for den om- og indskrevne cirkel er O og I.

Vis, at $OI \parallel EF$.



c. I ΔABC er $C = 60°$ og AF og BE er vinkelhalveringslinjer fra A og B.

Vis, at $EF \leq \frac{1}{2} AB$.



Besvarelse:

a.

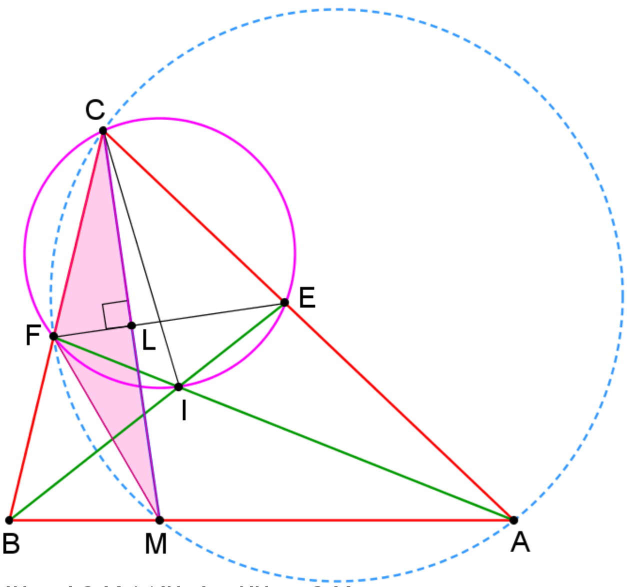
<u>*1. metode*</u>

Projektionen af C på EF er L, og CL skærer AB i M. Vi viser, at $CL = LM$.
Idet I er centrum for den indskrevne cirkel, får vi i ΔBIA, at

$$\angle BIA = 180° - \tfrac{1}{2}B - \tfrac{1}{2}A = 180° - \tfrac{1}{2}(B + A)$$

$$= 180° - \tfrac{1}{2}(180° - C) = 180° - \tfrac{1}{2} \cdot 120° = 120° \ .$$

Dermed er $\angle FIE = \angle BIA = 120°$, og dette giver, at $\square CFIE$ er indskrivelig, da summen af et par modstående vinkler er 180°. Lige store periferivinkler i fir- kantens omskrevne cirkel giver, at



$$\angle BEF = \angle IEF$$

$$= \angle ICF = \tfrac{1}{2}C = 30° \ .$$

Dernæst får vi i ΔBEF, at

$$\angle CFE = 180° - \angle BFE$$

$$= \angle FBE + \angle BEF = \tfrac{1}{2}B + 30° .$$

I den retvinklede ΔCLF får vi derefter

$$\angle FCM = \angle FCL = 90° - \angle CFL = 90° - \angle CFE \tag{1}$$

Da

$$\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}C = 90° \quad \text{eller} \quad \tfrac{1}{2}B = 90° - 30° - \tfrac{1}{2}A = 60° - \tfrac{1}{2}A \ ,$$

får vi af (1), at

$$\angle FCM = 60° - \left(60° - \tfrac{1}{2}A\right) = \tfrac{1}{2}A = \angle FAM \ .$$

Dette medfører, at $\square FMAC$ er indskrivelig, så lige store periferivinkler i den omskrevne cirkel giver, at

$$\angle FMC = \angle FAC = \tfrac{1}{2}A = \angle FCM \ .$$

Dermed er ΔFMC ligebenet, og da $FL \perp CM$, er L midtpunkt af grundlinjen CM, dvs. $CL = LM$.

<u>*2. metode*</u> (Jens-Søren Andersen, Esbjerg).

Som i 1. metode ses, at $\square CFIE$ er indskrive- lig, så $\angle EFI = \angle ECI = 30°$ og tilsvarende er $\angle FEI = \angle FCI = 30°$. Altså er ΔEIF ligebenet og $EI = FI$.
En spejling i IE fører F over i et punkt J på AB. Lad FJ skære BI i P. Så er ΔFPI og ΔJPI kongruente, så $IJ = FI$ og $\angle FIJ = 2 \cdot \angle FIB = 120°$.

Vi har nu, at $IJ = FI = EI$, så ΔFIE og ΔFIJ er kongruente, så $EF = FJ$. Dermed er ΔEFJ ligebenet, og da $\angle EFJ = 2\cdot\angle EFI = 60°$, er ΔEFJ ligesidet og I er centrum for dens omskrevne cirkel c_1.

Ved spejlingen i EF føres I over i Q og cirklen c_1 over i en cirkel c_2 med centrum Q. Da

$$\angle FQE = \angle FIE = 120° = 2\cdot 60° = 2\cdot\angle FCE\,,$$

er C periferivinkel i c_2, så C ligger på cirklen.

Da I ligger på højden fra J i den ligesidede ΔEFJ, ligger J, I og Q på linje. I ΔBIJ har vi, at

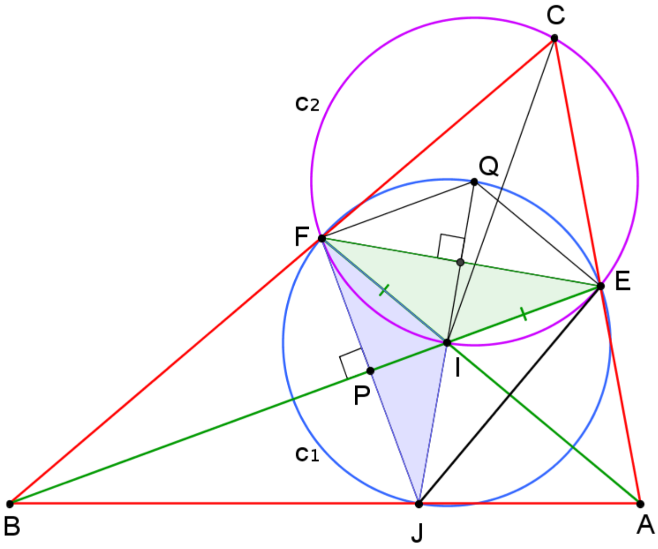
$$\angle IJA = 180° - \angle IJB$$

$$= \angle IBJ + \angle BIJ$$

$$= \tfrac{1}{2}B + 60° \quad \le 90° \qquad (1)$$

Cirklen c_1 skærer AB i J og K. Da $\angle IJA \le 90°$, ligger K på samme side af linjen IQ som A, og

$$\angle IJK = \angle IJA = \tfrac{1}{2}B + 60°.$$



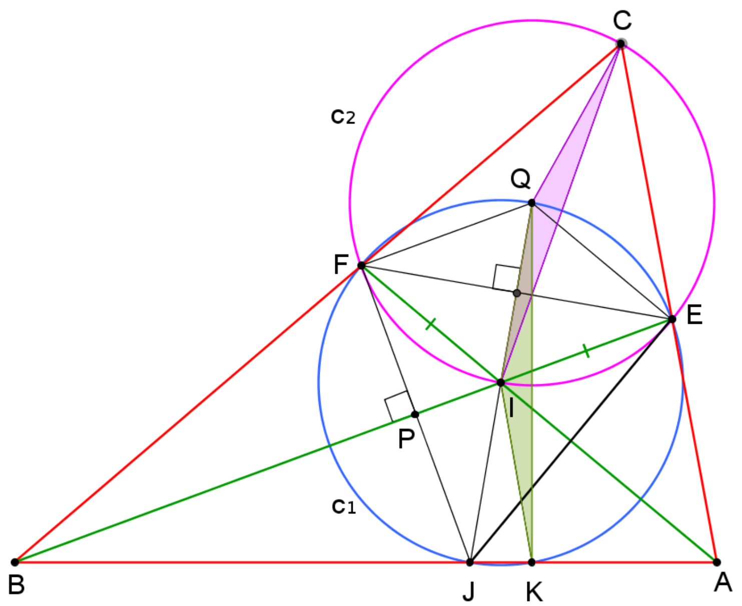
Videre er

$$\angle QIK = 180° - \angle JIK = 180° - (180° - 2\cdot\angle IJK) = 2\left(\tfrac{1}{2}B + 60°\right). \qquad (2)$$

Idet Q er centrum for c_2, er ΔQEC ligebenet, så

$$\angle ECQ = \angle CEQ = \angle BEC - \angle IEQ = 180° - \angle BEA - \angle IEQ$$

$$= \angle EBA + \angle BAE - 60° = \tfrac{1}{2}B + A - 60° = \tfrac{1}{2}B + A - \left(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B\right) = \tfrac{1}{2}A\,.$$



I ΔQEC er så

$$\angle EQC = 180° - 2\cdot\angle ECQ = 180° - A = 60° + B,$$

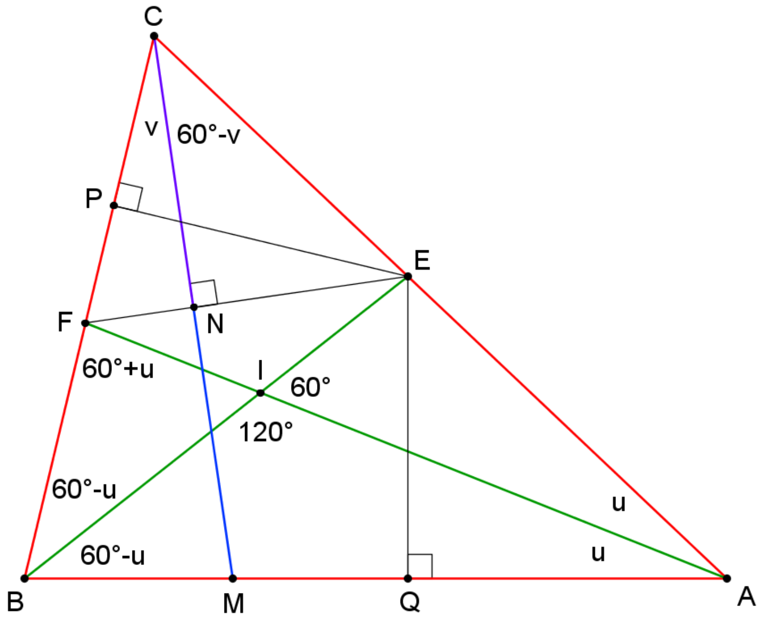
fordi $A + B = 120°$. Desuden gælder efter (1), at

$$\angle IQC = \angle IQE + \angle EQC = 60° + (60° + B) = 2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}B + 60°\right) \leq 180°. \qquad (3)$$

Da altså $\angle IQC \leq 180°$, ligger C og E på samme side af linjen IQ. Efter (2) og (3) er så

$$\angle QIK = \angle IQC \ ,$$

og da A og E ligger på samme side af linjen IQ, ligger K og C på samme side af IQ. Da yderligere IK og QC er radier i c_1 og c_2 føres ΔIQC ved en spejling i EF over i ΔQIK. Altså føres C over i K ved denne spejling.



<u>*3. metode*</u> (Jan Erik Pedersen, Aakirkeby).

Lad P og Q være projektionerne af E på BC og BA. Vi sætter

$$u = \angle FAB = \angle FAC \ .$$

Så er

$$B = 180° - A - C$$
$$= 120° - 2u\ ,$$

hvoraf

$$\angle EBA = \angle EBC$$
$$= 60° - u.$$

I ΔBIA ses, at $\angle BIA = 120°$ og i ΔPEC, at $\angle PEC = 30°$. Desuden ses i ΔEQA, at $\angle AEQ = 90° - 2u$, i ΔBEQ er $\angle BEQ = 30° + u$ og i ΔFIB er $\angle BFI = 60° + u$.

Vi kan antage, at $AB = 1$. Sinusrelationen i ΔABC giver

$$\frac{1}{\sin 60°} = \frac{a}{\sin 2u} = \frac{b}{\sin(120° - 2u)} \ ,$$

hvoraf

$$a = \frac{\sin 2u}{\sin 60°} \ , \ b = \frac{\sin(120° - 2u)}{\sin 60°} = \frac{\sin(60° + 2u)}{\sin 60°} \ . \qquad (1)$$

I ΔACF er $\angle AFC = 180° - (60° + u) = 120° - u$, så

$$\frac{CF}{\sin u} = \frac{b}{\sin(120° - u)} \quad \Leftrightarrow \quad CF = \frac{b \cdot \sin u}{\sin(60° + u)} \ ,$$

og heri indsættes (1):

$$CF = \frac{\sin(60° + 2u) \cdot \sin u}{\sin 60° \cdot \sin(60° + u)} \ . \qquad (2)$$

I ΔBEA er

$$\angle BEA = 180° - (60° - u) - 2u = 120° - u\ ,$$

så

$$\angle BEC = 180° - \angle BEA = 60° + u \ ,$$

og i ΔBCE får vi så ved hjælp af sinusrelationen

$$\frac{CE}{\sin(60°-u)} = \frac{a}{\sin(60°+u)} \quad \Leftrightarrow \quad CE = \frac{a\cdot\sin(60°-u)}{\sin(60°+u)}\ .$$

Heri indsættes (1):

$$CE = \frac{\sin 2u\cdot\sin(60°-u)}{\sin 60°\cdot\sin(60°+u)}\ . \qquad (3)$$

Lad projektionen af C på EF være N og lad CN skære AB i M. Vi sætter $v = \angle FCN$. Så gælder i ΔCEF, at

$$CN = CF\cdot\cos v = CE\cdot\cos(60° - v)\ ,$$

og ved hjælp af (2) og (3) får vi heraf

$$\frac{\cos(60°-v)}{\cos v} = \frac{CF}{CE} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\cos(60°-v)}{\cos v} = \frac{\sin(60°+2u)\cdot\sin u\cdot\sin 60°\cdot\sin(60°+u)}{\sin 60°\cdot\sin(60°+u)\cdot\sin 2u\cdot\sin(60°-u)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\cos(60°-v)}{\cos v} = \frac{\sin u\cdot\sin(60°+2u)}{\sin 2u\cdot\sin(60°-u)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\cos(60°-v)}{\cos v} = \frac{\sin(60°+2u)}{2\cos u\cdot\sin(60°-u)}\ .$$

Denne ligning er opfyldt for $v = u$, thi erstattes v med u er dens ensbetydende med (gang over kors):

$$2\cos(60° - u)\cdot\sin(60° - u) = \sin(60° + 2u) \quad \Leftrightarrow \quad \sin(120° - 2u) = \sin(60° + 2u)\ ,$$

hvilket er sandt. Nu gælder i ΔCFN, at

$$CN = CF\cdot\cos v = CF\cdot\cos u = \frac{\sin(60°+2u)\cdot\sin u\cdot\cos u}{\sin 60°\cdot\sin(60°+u)} = \frac{\sin(60°+2u)\cdot\sin 2u}{\sqrt{3}\cdot\sin(60°+u)}\ . \qquad (4)$$

I ΔBCM er

$$\angle BMC = 180° - u - 2\cdot(60°-u) = 60° + u\ ,$$

så sinusrelationen giver

$$\frac{CM}{\sin(120°-2u)} = \frac{a}{\sin(60°+u)} \quad \Leftrightarrow \quad CM = \frac{a\cdot\sin(60°+2u)}{\sin(60°+u)}\ .$$

Heri indsættes (1):

$$CM = \frac{\sin(60°+2u)\cdot\sin 2u}{\sin(60°+u)\cdot\sin 60°} = \frac{2\sin 2u\cdot\sin(60°+2u)}{\sqrt{3}\cdot\sin(60°+u)}\ . \qquad (5)$$

Af (4) og (5) fås, at $CM = 2\cdot CN$.

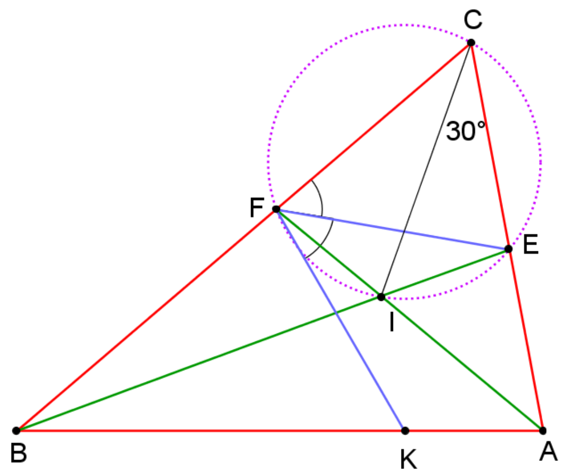
<u>*4. metode*</u> (Jens-Søren Andersen, Esbjerg).

Vi får som i 1. metode, at □$CFIE$ er indskrivelig, og at $\angle EFI = \angle ECI = 30°$. Lad K være et punkt på AB, så $\angle KFE = \angle CFE = u$. Så er

$$\angle BFK = 180° - \angle KFC = 180° - 2u$$
$$= 180° - 2\cdot\left(\angle CFA - \angle EFI\right).$$

Nu er

$$\angle CFA = 180° - \angle BFA$$
$$= \angle FBA + \angle FAB = B + \tfrac{1}{2}A\ ,$$



så vi får

$$\angle BFK = 180° - 2\cdot\left(B + \tfrac{1}{2}A - 30°\right) = 180° - 2B - A + 60°$$
$$= A + B + C - 2B - A + C = 2C - B = 120° - B = A\,,$$

fordi $A + B = 120°$. Dermed er ΔABC og ΔFBK ensvinklede, så

$$\frac{FK}{FB} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}\,. \qquad (1)$$

Efter sætningen om vinkelhalveringslinjens delingsforhold af den modstående side, er

$$\frac{b}{c} = \frac{FC}{FB}\,. \qquad (2)$$

Nu giver (1) og (2), at

$$\frac{FK}{FB} = \frac{FC}{FB}\,,$$

så $FC = FK$. Så er ΔFCK ligebenet og FE er vinkelhalveringslinje for topvinklen KFC. Dermed er K netop spejlbilledet af C i EF.

b.

Vi har, at $\angle AOB = 120°$, og i ΔAIB får vi

$$\angle AIB = 180° - \angle IBA - \angle IAB = 180° - \tfrac{1}{2}(A+B) = 180° - \tfrac{1}{2}(180° - C) = 120°.$$

Derfor ligger punkterne O, I, A og B på en cirkel c.

Lad R være midtpunkt af buen $\overset{\frown}{AB}$. Så ligger R, I og C på linje, og i ΔBIC får vi

$$\angle RIB = 180° - \angle CIB = \angle ICB + \angle IBC = \tfrac{1}{2}(C+B)\,.$$

Desuden er

$$\angle RBI = \angle RBA + \angle ABE = 30° + \tfrac{1}{2}B = \tfrac{1}{2}(C+B)\,.$$

Dermed er ΔRIB ligebenet, så $RI = RB$. På samme måde er ΔRIA ligebenet, så $RI = RA$. Altså er R centrum for cirklen c.

I den ligebenede ΔAOB er $\angle AOB = 120°$, så $\angle ABO = 30°$. I den indskrivelige $\square BOIA$ er modstående vink- ler supplementvinkler, så

$$\angle AIO = 150°$$

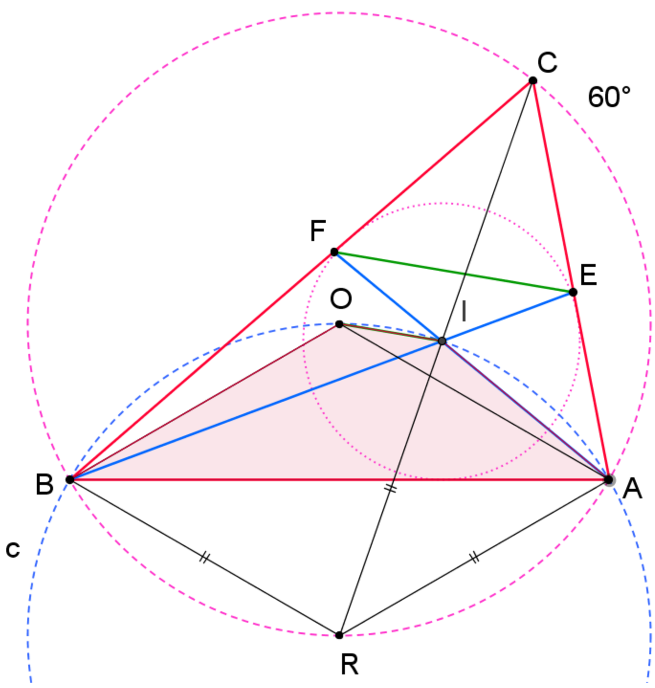
og dermed

$$\angle OIF = 30°$$

og

$$\angle FIE = \angle BIA = 120°\,.$$

Dette giver, at $\square IFCE$ er indskrivelig, og lige store periferivinkler i den om- skrevne cirkel giver



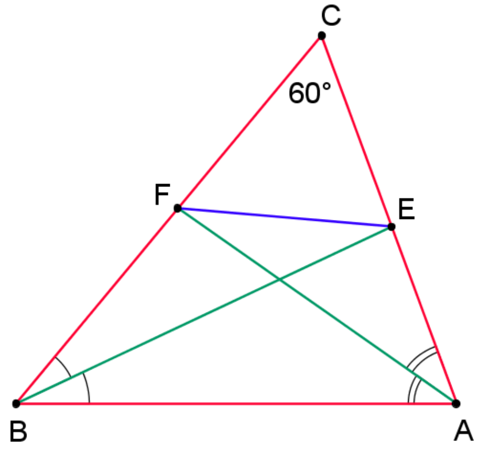
$$\angle IFE = \angle ICE = 30°$$

og

$$\angle IEF = \angle ICF = 30° \ .$$

Da vi nu har, at $\angle OIF = \angle IFE$, er $OI \parallel EF$.

c.



Cosinusrelationen i ΔABC giver

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C = a^2 + b^2 - ab$. (1)

Så har vi

$$c^2 - \left(\tfrac{1}{2}(a+b)\right)^2 = a^2 + b^2 - ab - \tfrac{1}{4}(a+b)^2$$
$$= \tfrac{3}{4}(a^2 + b^2 - 2ab) = \tfrac{3}{4}(a-b)^2 \geq 0 \ .$$

Dermed er

$$c^2 \geq \left(\tfrac{1}{2}(a+b)^2\right) \quad \Leftrightarrow \quad c \geq \tfrac{1}{2}(a+b) \ . \quad (2)$$

Efter sætningen om vinkelhalveringslinjens delingsforhold af den modstående side gæl- der

$$CE = \frac{ab}{a+c} \ , \ AE = \frac{bc}{a+c} \ , \ CF = \frac{ab}{b+c} \ , \ BF = \frac{ac}{b+c} \ .$$

Cosinusrelationen i ΔCEF giver

$$EF^2 = CE^2 + CF^2 - 2 \cdot CE \cdot CF \cdot \cos C$$

$$= \left(\frac{ab}{a+c}\right)^2 + \left(\frac{ab}{b+c}\right)^2 - 2 \cdot \frac{ab}{a+c} \cdot \frac{ab}{b+c} \cdot \frac{1}{2} \ = \frac{a^2b^2}{(a+c)^2} + \frac{a^2b^2}{(b+c)^2} - \frac{a^2b^2}{(a+c)(b+c)}$$

$$= \frac{a^2b^2(b+c)^2 + a^2b^2(a+c)^2 - a^2b^2(a+c)(b+c)}{(a+c)^2(b+c)^2}$$

$$= \left(\frac{ab}{(a+c)(b+c)}\right)^2 \cdot \left((b+c)^2 + (a+c)^2 - (a+c)(b+c)\right)$$

$$= \left(\frac{ab}{(a+c)(b+c)}\right)^2 \cdot \left(a^2 + b^2 + c^2 + ac + bc - ab\right) \ .$$

Heri indsættes $a^2 + b^2 = c^2 + ab$ fra (1):

$$EF^2 = \left(\frac{ab}{(a+c)(b+c)}\right)^2 \cdot (c^2 + ab + c^2 + ac + bc - ab)$$

$$= \left(\frac{ab}{(a+c)(b+c)}\right)^2 \cdot (2c^2 + c(a+b)) \ . \qquad (3)$$

Efter (2) har vi

$$2c^2 + c(a+b) \leq 2c^2 + c \cdot 2c = 4c^2 \ .$$

Af (3) får vi så vurderingen

$$EF^2 \le \left(\frac{ab}{(a+c)(b+c)}\right)^2 \cdot 4c^2 \quad \Leftrightarrow \quad EF \le \frac{ab}{(a+c)(b+c)} \cdot 2c\ . \qquad (4)$$

Vi ønsker at vise, at

$$\frac{ab}{(a+c)(b+c)} \le \frac{1}{4}\ ,$$

idet vi så efter (4) får

$$EF \le \tfrac{1}{4} \cdot 2c = \tfrac{1}{2}c\ .$$

Vi får

$$\frac{ab}{(a+c)(b+c)} \le \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 4ab \le ab + bc + ac + c^2 \quad \Leftrightarrow \quad c^2 + c(a+b) - 3ab \ge 0\ .$$

Det er denne ulighed, vi skal vise. Ved hjælp af (2) får vi

$$c^2 + c(a+b) - 3ab \ge \left(\tfrac{1}{2}(a+b)\right)^2 + \tfrac{1}{2}(a+b)^2 - 3ab$$

$$= \tfrac{3}{4}(a+b)^2 - 3ab = \tfrac{3}{4}(a-b)^2 \ge 0\ .$$

Dette er det ønskede og beviset er fuldført.

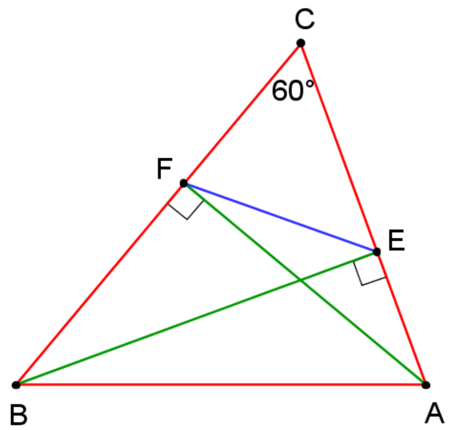
Bemærkning. Hvis $C = 60°$ og AF og BE er høj- der, gælder, at $EF = \frac{1}{2}AB$. Vi ser nemlig, at ΔAFC er en 30°-60°-90°-trekant, så $CF = \frac{1}{2}AC$. Desuden er ΔBEC en 30°-60°-90°-trekant, så
$CE = \frac{1}{2}BC$. Heraf fås, at

$$\frac{CF}{AC} = \frac{CE}{BC} = \frac{1}{2}\ .$$

Dette medfører, at ΔCEF og ΔABC er ensvinklede, så

$$\frac{FE}{AB} = \frac{CE}{BC} = \frac{1}{2}\ ,$$

og dermed er $EF = \frac{1}{2}AB$.



Besvarelser modtaget fra:

- Jens-Søren Andersen
- Walther Janous
- Jan Erik Pedersen