Svar på opgave 370 (Maj 2020)

Opgave:

Et par ligningssystemer er aldrig af vejen!

a. Lad a, b og c være positive reelle tal. Løs inden for de reelle tal ligningssystemet

$$\begin{aligned} ax + by &= (x - y)^2 \\ by + cz &= (y - z)^2 \\ cz + ax &= (z - x)^2 \,. \end{aligned}$$

b. Løs inden for de reelle tal ligningssystemet

$$\begin{aligned} (x^2 - 6x + 13)\cdot y &= 20 \\ (y^2 - 6y + 13)\cdot z &= 20 \\ (z^2 - 6z + 13)\cdot x &= 20 \end{aligned}$$

c. Løs inden for de reelle tal ligningssystemet

$$\begin{aligned} x(y^2 + z) &= z(z + xy) \\ y(z^2 + x) &= x(x + yz) \\ z(x^2 + y) &= y(y + zx) \end{aligned}$$

d. Løs inden for de reelle tal ligningssystemet

$$\begin{aligned} x^2 - yz &= 1 \\ y^2 - zx &= 2 \\ z^2 - xy &= 3 \,. \end{aligned}$$

Besvarelse:

a. Lad a, b og c være positive reelle tal. Løs inden for de reelle tal ligningssystemet

$$\begin{aligned} ax + by &= (x - y)^2 \\ by + cz &= (y - z)^2 \\ cz + ax &= (z - x)^2 \,. \end{aligned}$$

Svar a. Addition af ligningerne giver

$$ax + by + cz = \tfrac{1}{2}\left((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\right) .$$

Fra denne ligning trækkes efter tur hver af de tre givne ligninger, så vi får

$$cz = \tfrac{1}{2}(x - y)^2 + \tfrac{1}{2}(y - z)^2 + \tfrac{1}{2}(z - x)^2 - (x - y)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad cz = \tfrac{1}{2}(y - z)^2 + \tfrac{1}{2}(z - x)^2 - \tfrac{1}{2}(x - y)^2 \quad \Leftrightarrow \quad cz = (z - x)(z - y) \;, \qquad (1)$$

og tilsvarende

$$ax = (x - y)(x - z) \quad \text{og} \quad by = (y - z)(y - x) \ . \tag{2}$$

Vi ganger ligningerne (1) og (2) med henholdsvis $y - x$, $z - y$ og $x - z$:

$$\begin{aligned} cz(y - x) &= (x - y)(y - z)(z - x) \\ ax(z - y) &= (x - y)(y - z)(z - x) \\ by(x - z) &= (x - y)(y - z)(z - x) \ . \end{aligned} \tag{3}$$

For nemheds skyld sætter vi

$$k = (x - y)(y - z)(z - x)$$

så vi har, at

$$z(y - x) = \frac{k}{c} \quad , \quad x(z - y) = \frac{k}{a} \quad , \quad y(x - z) = \frac{k}{b} \quad .$$

Addition af disse ligninger giver

$$k \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = zy - zx + xz - xy + yx - yz = 0 \ .$$

Da a, b og c er positive, slutter vi, at $k = 0$, så

$$(x - y)(y - z)(z - x) = 0 \ .$$

Dermed er to af tallene x, y og z ens. Hvis fx $x = y$ får vi af (2), at $x = 0$ og $y = 0$ og af (1) fås derefter

$$cz = z^2 \ ,$$

hvoraf $z = 0$ eller $z = c$. Løsninger er altså

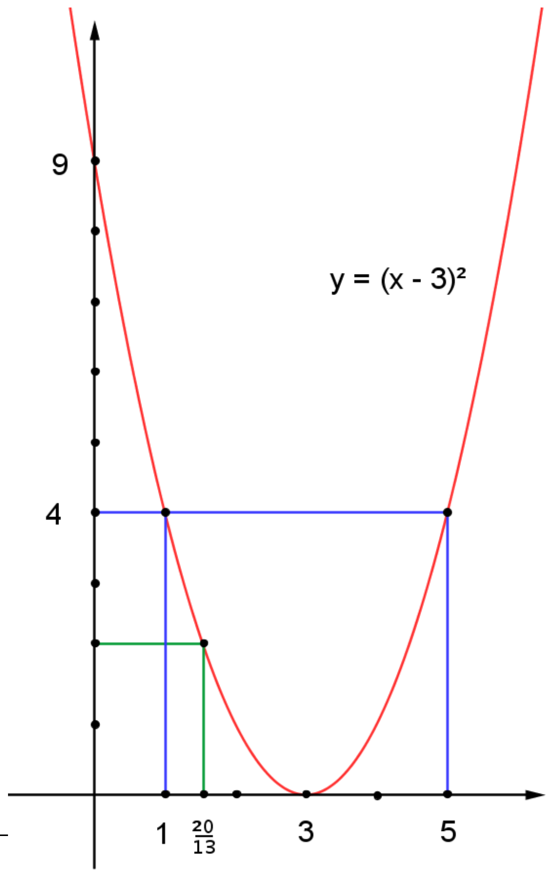
$$(x,y,z) \ : \ (0,0,0) \ , (0,0,c) \ .$$

Analogt får vi løsningerne

$$(x,y,z) \ : \ (0,b,0) \ , \ (a,0,0) \ .$$

b. Løs inden for de reelle tal ligningssystemet

$$\begin{aligned} (x^2 - 6x + 13) \cdot y &= 20 \\ (y^2 - 6y + 13) \cdot z &= 20 \\ (z^2 - 6z + 13) \cdot x &= 20 \end{aligned}$$



Svar b.

1. metode.

Hver af parenteserne er positiv, så x, y og z er positive.

Vi omskriver systemet til

$$\begin{aligned} ((x - 3)^2 + 4) \cdot y &= 20 \\ ((y - 3)^2 + 4) \cdot z &= 20 \\ ((z - 3)^2 + 4) \cdot x &= 20 \ . \end{aligned}$$

Parenteserne er mindst 4, så x, y og z ligger i intervallet]0;5].

Men så vil

$$(x - 3)^2 < 9 \quad , \quad (y - 3)^2 < 9 \quad , \quad (z - 3)^2 < 9 \ .$$

Vi får så

$$20 = ((x - 3)^2 + 4) \cdot y < 13y \quad \text{så} \quad y > \tfrac{20}{13} \ .$$

På same made er $x > \frac{20}{13}$ og $z > \frac{20}{13}$. Af det grafiske billede for funktionen $f(x) = (x - 3)^2$ ser vi, at hvis $\frac{20}{13} < x \leq 5$, er $(x - 3)^2 \leq 4$.

Analogt er $(y - 3)^2 \leq 4$ og $(z - 3)^2 \leq 4$. Heraf følger, at

$$20 = ((x - 3)^2 + 4)\cdot y \leq 8y \quad \text{så} \quad y \geq 2\tfrac{1}{2} \ ,$$

så også $x \geq 2\frac{1}{2}$ og $z \geq 2\frac{1}{2}$.

Vi viser, at $x = y = z = 4$ er den eneste løsning til ligningssystemet.

Antag at $x \neq 4$. Hvis $2\frac{1}{2} \leq x < 4$ er
$x - 3 < 1$ så

$$4 < (x - 3)^2 + 4 < 5$$

hvoraf

$$20 = ((x - 3)^2 + 4)\cdot y < 5y \quad \text{så} \quad y > 4 \ ,$$

og dermed $y - 3 > 1$.

Dernæst er

$$20 = ((y - 3)^2 + 4)\cdot z > 5z \quad \text{så} \quad z < 4 \ ,$$

og dermed $z - 3 < 1$. Så er

$$20 = ((z - 3)^2 + 4)\cdot x < 5x \quad \text{så} \quad x > 4 \ .$$

Dette er i strid med forudsætningen om x.

Hvis $4 < x < 5$, får vi

$$20 = ((x - 3)^2 + 4)\cdot y > 5y \quad \text{så} \quad y < 4 \ ,$$

$$20 = ((y - 3)^2 + 4)\cdot z < 5z \quad \text{så} \quad z > 4 \ ,$$

$$20 = ((z - 3)^2 + 4)\cdot x > 5x \quad \text{så} \quad x < 4 \ ,$$

hvilket er i strid med forudsætningen om x.

Vi har kun muligheden $x = 4$ tilbage, hvilket i de to første ligninger giver

$$5y = 20 \iff y = 4 \qquad \text{og} \qquad 5z = 20 \iff z = 4 \ ,$$

og $(x,y,z) = (4,4,4)$ passer også i den sidste ligning. Altså er den eneste løsning til ligningssystemet $(x,y,z) = (4,4,4)$.

2. metode (Jens Søren Andersen).
Vi har, at

$$y = \frac{20}{x^2 - 6x + 13} \ , \ z = \frac{20}{y^2 - 6y + 13} \ , \ x = \frac{20}{z^2 - 6z + 13} \ .$$

Vi sætter

$$f(t) = \frac{20}{t^2 - 6t + 13} \ ,$$

så

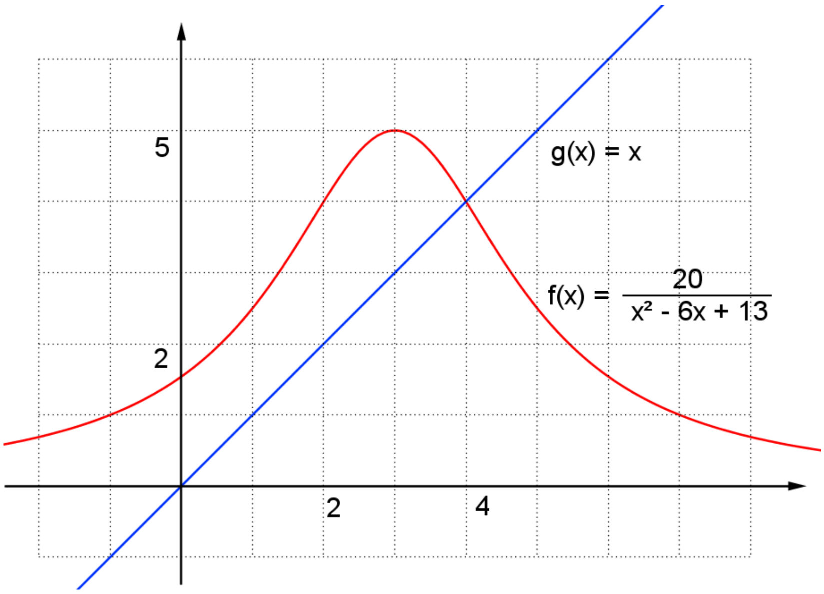
$$y = f(x) \ , \quad z = f(y) = f(f(x)) \ , \quad x = f(z) = f(f(f(x))) \ .$$

Det grafiske billede af $f(x)$ ses på figuren.

Vi skal løse ligningen

$$f(f(f(x))) = x \ . \tag{1}$$

Idet $t^2 - 6t + 13 = (t - 3)^2 + 4$, har $f(t)$ sin størsteværdi $\frac{20}{4} = 5$ for $t = 3$, og $f(4) = 4$.



Altså er

$$f(f(f(4))) = f(f(4)) = f(4) = 4 \ ,$$

så en løsning til (1) er $x = 4$. Derefter er $y = f(4) = 4$ og $z = f(4) = 4$, så $(x,y,z) = (4,4,4)$ er en løsning til ligningssystemet.

Lad (x,y,z) være en løsning til ligningssystemet. På grund af rotationssymmetrien er (z,x,y) og (y,x,z) også løsninger, så vi kan uden indskrænkninger antage, at $x \le z$.

Vi ser, at

$$f(x) < x \iff x > 4 \ , \ f(x) > x \iff x < 4 \ , \ f(4) = 4 \ . \tag{2}$$

Nu er $f(z) = x \le z$. Da altså $f(z) \le z$, gælder efter (2), at $z \ge 4$, og da $f(x)$ har største- værdien 5, er $4 \le z \le 5$.

Da $f(5) = \frac{5}{2}$, ser vi af grafen for $f(x)$, at

$$f\left([4;5]\right) \subseteq \left[\tfrac{5}{2};4\right],$$

så

$$4 \le z \le 5 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{5}{2} \le x = f(z) \le 4 \ .$$

Derefter gælder

$$4 \le y = f(x) \le 5 \ ,$$

så

$$\tfrac{5}{2} \le z = f(y) \le 4 \ .$$

Dermed har vi fundet, at

$$4 \le z \le 5 \quad \text{og} \quad \tfrac{5}{2} \le z \le 4 \ ,$$

Altså $z = 4 = f(4)$. Dette medfører, at $x = y = z = 4$ er eneste løsning til ligningssystemet.

3. metode (Asger Olesen, Tønder).
Ligningssystemet omskrives til

$$y = \frac{20}{x^2 - 6x + 13} \ , \ z = \frac{20}{y^2 - 6y + 13} \ , \ x = \frac{20}{z^2 - 6z + 13} \ . \tag{3}$$

Da nævnerne er positive for alle værdier af x, y og z, er de tre variable positive.
Hvis to af de variable er ens, er den tredje variabel identisk med de to andre.
Hvis fx $x = y$, er højresiderne af de sidste to ligninger i (3) ens, så det følger, at $y = z$.
Hvis $x = y = z$, får vi

$$(x^2 - 6x + 13)\cdot x = 20 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 6x^2 + 13x - 20 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 4)(x^2 - 2x + 5) = 0 \ ,$$

hvoraf $x = 4$. Altså er $(x,y,z) = (4,4,4)$ eneste løsning til det oprindelige ligningssystem.
Vi antager derfor nu, at x, y og z er indbyrdes forskellige. Vi kan antage, at $x > y > z$. Så får vi af (3), at

$$\frac{20}{z^2-6z+13} > \frac{20}{x^2-6x+13} > \frac{20}{y^2-6y+13} \quad \Leftrightarrow \quad z^2-6z < x^2-6x < y^2-6y$$

$$\Leftrightarrow \quad z^2 - 6z < x^2 - 6x \quad \wedge \quad x^2 - 6x < y^2 - 6y$$

$$\Leftrightarrow \quad z^2 - x^2 - 6z + 6x < 0 \quad \wedge \quad x^2 - y^2 - 6x + 6y < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (z - x)(z + x - 6) < 0 \quad \wedge \quad (x - y)(x + y - 6) < 0.$$

Da $z - x < 0$ og $x - y > 0$ efter antagelsen, må der derfor gælde, at

$$z + x - 6 > 0 \quad \wedge \quad x + y - 6 < 0 \qquad \text{eller} \qquad z > 6 - x \quad \wedge \quad y < 6 - x \ ,$$

hvoraf $z > y$. Dette er i strid med, at $x > y > z$.
Andre størrelsesrelationer mellem x, y og z giver tilsvarende udregninger med efterføl- gende modstrid.
Konklusionen er derfor, at de tre tal x, y og z er ens, altså $x = y = z$. Altså er $(x,y,z) = (4,4,4)$ eneste løsning til ligningssystemet.

Bemærkning. Som kuriosum nævner vi, at hvis man bruger CAS, får man

$$f\,(f\,(f\,(x))) = x \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{t}{n} = 0 \ ,$$

hvor tælleren t og nævneren n er givet ved

$$t = 1047x^9 - 28268x^8 + 332876x^7 - 2239160x^6 + 9608942x^5 - 27778240x^4$$
$$- 55103244x^3 - 73091176x^2 + 58629677x - 21507380 \ ,$$
$$n = 1037x^8 - 24888x^7 + 251756x^6 - 139572x^5 + 4648142x^4$$
$$- 9665160x^3 + 12740844x^2 - 10418616x + 4373837 \ .$$

Tælleren kan skrives som produkt af tre polynomier

$$t = p(x)\cdot q(x)\cdot r(x) \ ,$$

hvor

$$p(x) = x - 4 \quad , \quad q(x) = x^2 - 2x + 4 \ ,$$

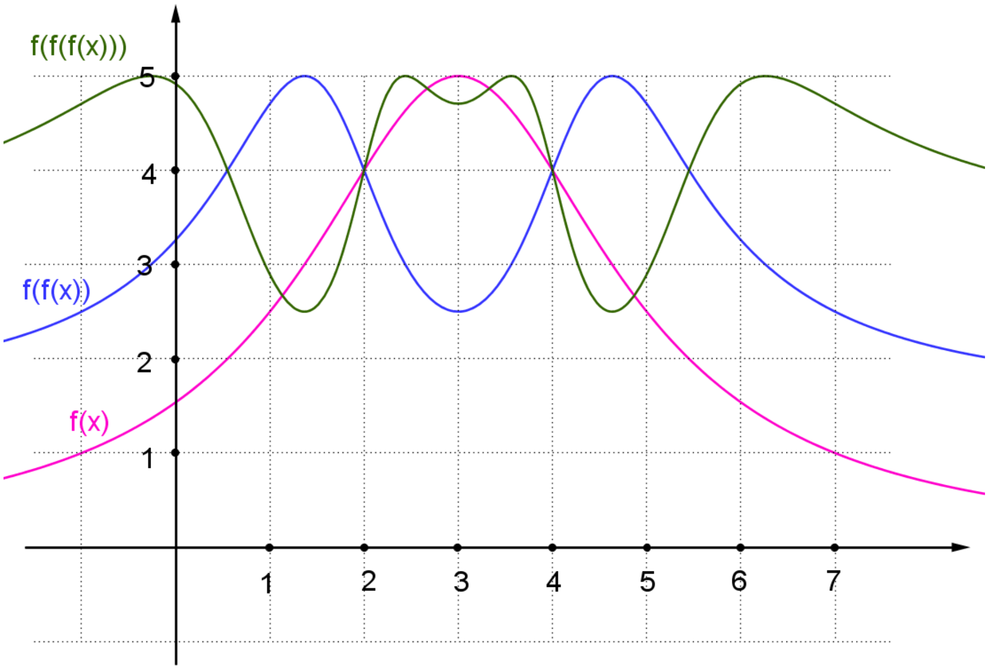
$$r(x) = 1037x^6 - 22046x^5 + 187119x^4 - 809108x^3 + 1880827x^2 - 2232494x + 1075369 \ .$$

Polynomiet $q(x)$ er positivt for alle x. Polynomiet $r(x)$ er positivt for alle x, idet det har de seks komplekse løsninger:

$$1{,}562 \pm 0{,}511\mathrm{i} \quad , \quad 3{,}237 \pm 0{,}819\mathrm{i} \quad , \quad 5{,}831 \pm 0{,}668\mathrm{i} \ .$$

Altså er $(x,y,z) = (4,4,4)$ eneste løsning til ligningssystemet.

Bemærkning. Med CAS kan man tegne det grafiske billede af $f\,(f\,(f\,(x)))$ som vist på figuren. Heraf fremgår også, at ligningen $f\,(f\,(f\,(x))) = x$ har præcis en løsning, nemlig $x = 4$.



c. Løs inden for de reelle tal ligningssystemet

$$x(y^2 + z) = z(z + xy)$$
$$y(z^2 + x) = x(x + yz)$$
$$z(x^2 + y) = y(y + zx)$$

Svar c.

1. metode.

Systemet er ensbetydende med

$$\begin{matrix} xy^2 + xz = z^2 + xyz \\ yz^2 + yx = x^2 + xyz \\ zx^2 + zy = y^2 + xyz \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} xy(y - z) = z(z - x) \\ yz(z - x) = x(x - y) \\ zx(x - y) = y(y - z) \ . \end{matrix} \qquad (1)$$

Multiplikation af ligningerne giver

$$x^2y^2z^2(y - z)(z - x)(x - y) = xyz(z - x)(x - y)(y - z) \ . \qquad (2)$$

Hvis $xyz = 0$, findes muligheden $x = 0$. Det oprindelige ligningssystem ser da sådan ud:

$$0 = z^2 \quad , \quad yz^2 = 0 \quad , \quad zy = y^2 \ .$$

Altså er $z = 0$ og dermed $y = 0$. En løsning er derfor $(x,y,z) = (0,0,0)$. På grund af sym- metrien fører mulighederne $y = 0$ og $z = 0$ også til løsningen $(x,y,z) = (0,0,0)$.

Antag så, at x, y og z alle er forskellige fra 0. Så er (2) ensbetydende med

$$xyz(y - z)(z - x)(x - y) = (z - x)(x - y)(y - z)$$
$$\Leftrightarrow \quad (y - z)(z - x)(x - y)(xyz - 1) = 0 \ . \qquad (3)$$

Hvis $y = z$ får (1) udseendet

$$0 = z(z - x) \quad , \quad y^2(y - x) = x(x - y) \quad , \quad yx(x - y) = 0 \ .$$

Da x, y og z ikke er 0 følger så $z = x$ og $x = y$. Dermed har vi $x = y = z$.

Antag så, at x, y og z indbyrdes forskellige tal. Af (3) følger, at $xyz = 1$ og det oprindelige ligningssystem ser sådan ud:

$$\begin{aligned} xyz(y-z) &= z^2(z-x) & & y-z = z^2(z-x) \\ xyz(z-x) &= x^2(x-y) & \Leftrightarrow\ & z-x = x^2(x-y) \\ xyz(x-y) &= y^2(y-z) & & x-y = y^2(y-z)\ . \end{aligned}$$

Uanset den indbyrdes størrelse mellem x, y og z, vil der opstå en modstrid i en af disse ligninger. Hvis fx $x < z < y$, er $z - x$ positiv og $x - y$ negativ i strid med den midterste ligning.

Altså kan x, y og z ikke være indbyrdes forskellige, så $x = y = z = 0$ eller $x = y = z$. Samlet er løsningsmængden alle talsæt af formen $(x,y,z) = (k,k,k)$, hvor k gennemløber de reelle tal.

2. metode (Wather Janous, Innsbruck).
Hvis $z = 0$ ser ligningssystemet sådan ud:

$$\begin{aligned} x(y^2+0) &= 0(0+xy) & & xy^2 = 0 & & \\ y(0+x) &= x(x+0) & \Leftrightarrow\quad & xy = x^2 & \Leftrightarrow\quad & x = 0 \wedge y = 0\ . \\ 0(x^2+y) &= y(y+0) & & 0 = y^2 & & \end{aligned}$$

Hvis en af de variable er 0, er de altså alle 0.

Vi forudsætter nu, at ingen af de variable er 0. Så får vi i den første ligning

$$x(y^2+z) = z(z+xy) \quad\Leftrightarrow\quad x(y^2+z-yz) = z^2 \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{z^2}{y^2-yz+z}\ . \qquad (1)$$

Tilsvarende får vi af de to øvrige ligninger:

$$y = \frac{x^2}{z^2-xz+x} \quad \text{og} \quad z = \frac{y^2}{x^2-xy+y}\ . \qquad (2)$$

Ligning (1) indsættes i ligningerne (2):

$$y = \frac{\left(\dfrac{z^2}{y^2-yz+z}\right)^2}{z^2 - \dfrac{z^2}{y^2-yz+z}\cdot z + \dfrac{z^2}{y^2-yz+z}} \quad \text{og} \quad z = \frac{y^2}{\left(\dfrac{z^2}{y^2-yz+z}\right)^2 - y\cdot\dfrac{z^2}{y^2-yz+z} + y}$$

Dette reduceres til

$$y = \frac{z^2}{(y^2-yz+1)(y^2-yz+z)} \qquad (3)$$

og

$$z = \frac{y^2(y^2-yz+z)^2}{y^5-2y^4z+2y^3z+y^2z^2(z-2)+yz^2(1-z)+z^4}\ . \qquad (4)$$

Ligning (3) omskrives til

$$y - \frac{z^2}{(y^2-yz+1)(y^2-yz+z)} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(y-z)(-y^4+y^3z-y^2(z+1)-z)}{(y^2-yz+1)(y^2-yz+z)} = 0$$

$$\Leftrightarrow\quad z = y \ \vee\ z = \frac{y^2(y^2+1)}{y^3-y^2-1}\ . \qquad (5)$$

Hvis $z = y$ fås af (1):

$$x = \frac{z^2}{z^2-z^2+z} = z\ ,$$

altså $x = y = z$.

Udtrykket for z i den sidste ligning i (5) indsættes i (4), hvilket ved reduktion med CAS (egentlig ikke et tilladt hjælpemiddel!) giver monstret

$$\frac{y\cdot(y^2+y+1)^3\cdot(y^6-2y^5+4y^4-4y^3+3y^2-2y+1)}{(y^3-y^2-1)\cdot(y^9+y^8+3y^7+3y^6+y^5+2y^4-y^3+2y^2+1)}=0\ .$$

Her er $y = 0$ en løsning. Anden faktor i tælleren er altid positiv. Tredje faktor i tælleren er aldrig 0, idet ligningen

$$y^6 - 2y^5 + 4y^4 - 4y^3 + 3y^2 - 2y + 1 = 0$$

har de 6 komplekse løsninger

$$0{,}746 \pm 0{,}393i\quad,\quad 0{,}413 \pm 1{,}402i\quad,\quad -0{,}160 \pm 0{,}795i\ .$$

Dermed er løsningerne $(x,y,z) = (k,k,k)$.

d. Løs inden for de reelle tal ligningssystemet

$$x^2 - yz = 1$$
$$y^2 - zx = 2$$
$$z^2 - xy = 3\ .$$

Svar d.
1. metode.
Subtraktion af den første ligning fra den anden giver

$$y^2 - x^2 + yz - zx = 1 \quad\Leftrightarrow\quad (y - x)(y + x) + z(y - x) = 1$$
$$\Leftrightarrow\quad (y - x)(x + y + z) = 1\ .$$

Subtraktion af den anden ligning fra den tredje giver

$$z^2 - y^2 + zx - xy = 1 \quad\Leftrightarrow\quad (z - y)(z + y) + x(z - y) = 1$$
$$\Leftrightarrow\quad (z - y)(x + y + z) = 1\ .$$

Altså er

$$y - x = \frac{1}{x+y+z} = z - y\ . \qquad (1)$$

Vi sætter
$$d = \frac{1}{x+y+z}\ .$$

Efter (1) er så

$$z = y + d \quad \text{og} \quad x = y - d\ ,$$

og den anden af de tre ligninger giver

$$y^2 - (y + d)(y - d) = 2 \quad\Leftrightarrow\quad d = \pm\sqrt{2}\ .$$

Af (1) får vi

$$y - x = z - y \quad\Leftrightarrow\quad 2y = x + z \quad\Leftrightarrow\quad 3y = x + y + z = \tfrac{1}{d}\ ,$$

så
$$y = \frac{1}{3d} = \pm\frac{1}{3\sqrt{2}}\ .$$

Så er

$$x = y - d = \frac{1}{3d} - d = \frac{1-3d^2}{3d} = \frac{1-6}{\pm 3\sqrt{2}} \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{-5}{\pm 3\sqrt{2}}\ ,$$

hvoraf

$$y=\frac{1}{3d}=\frac{1}{\pm 3\sqrt{2}}\ \ ,\ \ z=2y-x=\frac{2}{\pm 3\sqrt{2}}+\frac{5}{\pm 3\sqrt{2}}=\frac{7}{\pm 3\sqrt{2}}\ .$$

Løsninger til ligningssystemet er altså

$$(x,y,z)\ :\ \left(\frac{5}{-3\sqrt{2}},\frac{1}{3\sqrt{2}},\frac{7}{3\sqrt{2}}\right)\ ,\ \left(\frac{5}{3\sqrt{2}},\frac{1}{-3\sqrt{2}},\frac{7}{-3\sqrt{2}}\right).$$

2. metode (Jens Søren Andersen, Esbjerg).
Lad (x,y,z) være en løsning til ligningssyste- met.
Hvis $x = 0$ fås systemet

$$yz = -1\ \ ,\ \ y^2 = 2\ \ ,\ \ z^2 = 3\ ,$$

som ikke har løsninger.
Hvis $y = 0$ fås systemet

$$x^2 = 1\ \ ,\ \ zx = -2\ \ ,\ \ z^2 = 3\ ,$$

som ikke har løsninger.
Hvis $z = 0$ fås systemet

$$x^2 = 1\ \ ,\ \ y^2 = 2\ \ ,\ \ xy = -3\ ,$$

som ikke har løsninger.
Vi indfører tallene a, b og c ved

$$a=\tfrac{y}{x}\ ,\ b=\tfrac{z}{y}\ ,\ c=\tfrac{x}{z}\ ,$$

hvor så $abc = 1$. Ved division af den anden ligning med den første fås

$$2=\frac{y^2-zx}{x^2-yz}=\frac{\frac{y^2}{x^2}-\frac{z}{x}}{1-\frac{yz}{x^2}}=\frac{a^2-\frac{1}{c}}{1-\frac{a}{c}}=\frac{a^2c-1}{c-a}$$

$$\Leftrightarrow\quad 2c-2a=a^2c-1\quad\Leftrightarrow\quad c=\frac{2a-1}{2-a^2}\ , \tag{1}$$

hvor $c\neq a$ og $a^2\neq 2$. Division af den tredje ligning med den første giver

$$3=\frac{z^2-xy}{x^2-yz}=\frac{\frac{z^2}{x^2}-\frac{y}{x}}{1-\frac{yz}{x^2}}=\frac{\frac{1}{c^2}-a}{1-\frac{a}{c}}=\frac{1-ac^2}{c^2-ac}$$

$$\Leftrightarrow\quad 3c^2 - 3ac = 1 - ac^2\quad\Leftrightarrow\quad c((3 + a)c - 3a) = 1\ , \tag{2}$$

hvor $c\neq a$. Ligning (1) indsættes i ligning (2):

$$\frac{2a-1}{2-a^2}\left((3+a)\cdot\frac{2a-1}{2-a^2}-3a\right)=1$$

hvilket reduceres til

$$5a^4 + a^3 - 5a - 1 = 0\quad\Leftrightarrow\quad(5a + 1)(a^3 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow\quad a=-\tfrac{1}{5}\ \ \vee\ \ a = 1\ .$$

Hvis $a = 1$, er $x = y$, og det oprindelige ligningssystem får følgende udseende:

$$\begin{aligned} x^2 - xz &= 1\\ x^2 - xz &= 2\\ z^2 - x^2 &= 3\ , \end{aligned}$$

som tydeligvis ikke har løsninger.

Hvis $a = -\frac{1}{5}$ fås

$$c = \frac{2a-1}{2-a^2} = \frac{-\frac{2}{5}-1}{2-\frac{1}{25}} = -\frac{5}{7} \quad \text{og} \quad b = \frac{1}{ac} = \frac{1}{-\frac{1}{5}\cdot\frac{-5}{7}} = 7 \ .$$

Så er

$$\frac{y}{x} = a = -\frac{1}{5} \ \Leftrightarrow \ x = -5y \quad \text{og} \quad \frac{z}{y} = b = 7 \ \Leftrightarrow \ z = 7y \ .$$

Det oprindelige ligningssystem får udseendet

$$\begin{array}{c} (-5y)^2 - y\cdot 7y = 1 \\ y^2 - 7y\cdot(-5y) = 2 \\ (7y)^2 - (-5y)\cdot y = 3 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} 25y^2 - 7y^2 = 1 \\ y^2 + 35y^2 = 2 \\ 49y^2 + 5y^2 = 3 \ . \end{array}$$

Dette system er ensbetydende med, at $18y^2 = 1$, så $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{6}$. Dermed er

$$x = -5y = \mp\frac{5\sqrt{2}}{6} \quad \text{og} \quad z = 7y = \pm\frac{7\sqrt{2}}{6} \ ,$$

så løsningerne til ligningssystemet er

$$(x,y,z) = \left(\mp\frac{5\sqrt{2}}{6}\ , \pm\frac{\sqrt{2}}{6}\ , \pm\frac{7\sqrt{2}}{6}\right) .$$

3. metode.
Vi ser mere generelt på systemet

$$\begin{array}{c} x^2 - yz = a \\ y^2 - zx = b \\ z^2 - xy = c \ . \end{array}$$

Vi får, at

$$\begin{array}{ccc} x^2 - yz = a & \Leftrightarrow & x^2y - y^2z = ay \\ y^2 - zx = b & \Leftrightarrow & y^2z - xz^2 = bz \\ z^2 - xy = c & \Leftrightarrow & xz^2 - x^2y = cx \ , \end{array}$$

og addition giver

$$ay + bz + cx = 0 \ . \tag{3}$$

Videre er

$$\begin{array}{ccc} x^2 - yz = a & \Leftrightarrow & x^2z - yz^2 = az \\ y^2 - zx = b & \Leftrightarrow & xy^2 - x^2z = bx \\ z^2 - xy = c & \Leftrightarrow & yz^2 - xy^2 = cy \ , \end{array}$$

som ved addition giver

$$az + bx + cy = 0 \ . \tag{4}$$

Af (3) og (4) fås

$$\begin{array}{ccc} ay + bz + cx = 0 & \Leftrightarrow & a^2y + abz + acx = 0 \\ az + bx + cy = 0 & \Leftrightarrow & abz + b^2x + bcy = 0 \ . \end{array}$$

Af disse følger ved subtraktion, at

$$b^2x - acx = a^2y - bcy \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{a^2-bc} = \frac{y}{b^2-ac} \ .$$

Af (3) og (4) fås

$$\begin{array}{ccc} ay + bz + cx = 0 & \Leftrightarrow & aby + b^2z + bcx = 0 \\ az + bx + cy = 0 & \Leftrightarrow & acz + bcx + c^2y = 0 \ . \end{array}$$

Af disse følger ved subtraktion, at

$$c^2y - aby = b^2z - acz \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z}{c^2 - ab} = \frac{y}{b^2 - ac} .$$

I alt har vi derfor, at

$$\frac{x}{a^2 - bc} = \frac{y}{b^2 - ac} = \frac{z}{c^2 - ab} = k ,$$

så at

$$x = (a^2 - bc)k \quad , \quad y = (b^2 - ac)k \quad , \quad z = (c^2 - ab)k \; . \tag{5}$$

Disse udtryk for x, y og z indsættes i ligningen $z^2 - xy = c$:

$$[(c^2 - ab)k]^2 - (a^2 - bc)(b^2 - ac) = c$$

$$\Leftrightarrow \quad k^2 = \frac{c}{(c^2 - ab)^2 - (a^2 - bc)(b^2 - ac)} = \frac{c}{c^4 - 2abc^2 + a^2b^2 - a^2b^2 + a^3c + b^3c + abc^2}$$

$$= \frac{c}{c(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)} = \frac{1}{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc} .$$

I den givne opgave er $a = 1$, $b = 2$ og $c = 3$, så

$$k^2 = \frac{1}{1^3 + 2^3 + 3^3 - 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{18} \quad \Leftrightarrow \quad k = \pm \frac{1}{3\sqrt{2}} .$$

Ved indsættelse af k, a, b og c i ligningen (5) fås løsningerne.

Bemærkning. Hvis $a + b + c < 0$ har ligningssystemet ingen løsninger. Dette følger af faktoropløsningen i nævneren:

$$k^2 = \frac{1}{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc} = \frac{2}{(a + b + c)((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2)}$$

Her er nævneren negativ, hvilket er umuligt, da k^2 er positiv.

Besvarelser modtaget fra:

- Jens-Søren Andersen
- Hans Benner
- Klaus Grünbaum
- Walther Janous
- Asger Olesen