Svar på opgave 369 (April 2020)

Opgave:

Fra trigonometriens overdrev!

a. Bestem de gradtal x i $[0°;360°]$, for hvilke

$$\tan x = \tan(x+10°)\cdot\tan(x+20°)\cdot\tan(x+30°)\ .$$

b. Bestem de gradtal x i $[0°;360°]$, for hvilke

$$\tan x = \tan 2x\cdot\tan 3x\cdot\tan 4x\ .$$

c. Vis, at
$$\frac{\sin 50°}{\sin 70°}+\frac{\sin 70°}{\sin 10°}-\frac{\sin 10°}{\sin 50°}=6\ .$$

d. Vis, at
$$\cos 84° = 4\sin 24°\cdot\cos 72°\cdot\cos 78°\ .$$

e. Vis, at
$$\tfrac{1}{2}\tan 40°+\tan 10°+\frac{\sin 10°}{\sin 40°}=\tfrac{1}{2}\tan 60°\ .$$

Besvarelse:

a. Bestem de gradtal x i $[0°;360°]$, for hvilke

$$\tan x = \tan(x+10°)\cdot\tan(x+20°)\cdot\tan(x+30°)\ .$$

1. metode.
Vi omformer ligningen til

$$\tan x\cdot\cot(x+30°) = \tan(x+10°)\cdot\tan(x+20°)$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{\sin x\cdot\cos(x+30°)}{\cos x\cdot\sin(x+30°)}=\frac{\sin(x+10°)\cdot\sin(x+20°)}{\cos(x+10°)\cdot\cos(x+20°)}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{\sin(2x+30°)-\sin 30°}{\sin(2x+30°)+\sin 30°}=\frac{\cos 10°-\cos(2x+30°)}{\cos 10°+\cos(2x+30°)}$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(\sin(2x+30°)-\tfrac{1}{2}\right)\cdot\left(\cos 10°+\cos(2x+30°)\right) = \left(\sin(2x+30°)+\tfrac{1}{2}\right)\cdot\left(\cos 10°-\cos(2x+30°)\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad 2\cdot\sin(2x+30°)\cdot\cos(2x+30°) = \cos 10°$$

$$\Leftrightarrow\quad \sin(4x+60°) = \sin 80°\ .$$

Dette giver

$$4x+60° = 80°+p\cdot 360° \quad\vee\quad 4x+60° = 100°+p\cdot 360°$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 5° + p \cdot 90° \quad \vee \quad x = 10° + p \cdot 90° \ .$$

I intervallet [0°;360°] er løsningerne

$$x: \ 5°, \ 10°, \ 95°, \ 100°, \ 185°, \ 190°, \ 275°, \ 280°,$$

så vi fx får formlerne

$$\tan 5° = \tan 15° \cdot \tan 25° \cdot \tan 35°$$

$$\tan 10° = \tan 20° \cdot \tan 30° \cdot \tan 40°$$

$$\tan 95° = \tan 105° \cdot \tan 115° \cdot \tan 125° \quad \Leftrightarrow \quad \tan 85° = \tan 55° \cdot \tan 65° \cdot \tan 75°.$$

2. metode (Jens Søren Andersen).
Vi viser først et par formler for sin3x, cos3x og tan3x.
Vi får

$$4 \cdot \sin x \cdot \sin(60° - x) \cdot \sin(60° + x)$$

$$= 2\sin x \cdot [\cos(60° + x - (60° - x)) - \cos(60° + x - (60° - x))]$$

$$= 2\sin x \cdot (\cos 2x - \cos 120°) = 2\sin x \cdot \cos 2x + \sin x$$

$$=2\sin x \cdot (1 - 2\sin^2 x) + \sin x = 3\sin x - 4\sin^3 x = \sin 3x \ .$$

Dernæst er

$$4 \cdot \cos x \cdot \cos(60° - x) \cdot \cos(60° + x)$$

$$= 2\cos x \cdot [\cos(60° + x - (60° - x)) + \cos(60° + x - (60° - x))]$$

$$= 2\cos x \cdot (\cos 2x + \cos 120°) = 2\cos x \cdot \cos 2x - \cos x$$

$$= 2\cos x \cdot (2\cos^2 x - 1) - \cos x = 4\cos^3 x - 3\cos x = \cos 3x \ .$$

Endelig får vi

$$\tan 3x = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \frac{4 \cdot \sin x \cdot \sin(60° - x) \cdot \sin(60° + x)}{4 \cdot \cos x \cdot \cos(60° - x) \cdot \cos(60° + x)} = \tan x \cdot \tan(60° - x) \cdot \tan(60° + x) \ .$$

Dermed har vi

$$\frac{1}{\tan 3x} = \frac{1}{\tan x \cdot \tan(60° - x) \cdot \tan(60° + x)} \ . \qquad (1)$$

Nu er

$$\tan x = \frac{1}{\tan(90° - x)}$$

så

$$\tan(60° - x) = \frac{1}{\tan(30° + x)} \quad \text{og} \quad \tan(60° + x) = \frac{1}{\tan(30° - x)} \ .$$

Altså er (1) ensbetydende med

$$\frac{1}{\tan 3x} = \frac{1}{\tan x} \cdot \tan(30° + x) \cdot \tan(30° - x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan x = \tan 3x \cdot \tan(30° - x) \cdot \tan(30° + x) \ .$$

Ligningen i opgaven bliver så ensbetydende med

$$\tan 3x \cdot \tan(30° - x) \cdot \tan(30° + x) = \tan(x + 10°) \cdot \tan(x + 20°) \cdot \tan(x + 30°)$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan 3x \cdot \tan(30° - x) = \tan(x + 10°) \cdot \tan(x + 20°) \ .$$

Vi ser ved indsættelse, at $x = 5°$ og $x = 10°$ er løsninger.

Nu benytter vi, at

$$\tan(x + 90°) = -\frac{1}{\tan x} \ ,$$

så vi får

$$\tan x = \tan(x + 10°) \cdot \tan(x + 20°) \cdot \tan(x + 30°)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{-\tan x} = \frac{1}{-\tan(x+10°)} \cdot \frac{1}{-\tan(x+20°)} \cdot \frac{1}{-\tan(x+30°)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan(x + 90°) = \tan((x + 90°) + 10°) \cdot \tan((x + 90°) + 20°) \cdot \tan((x + 90°) + 30°)$$

Dermed har vi, at x er en løsning til den givne ligning netop hvis $x + 90°$ er en løsning. Derfor har vi nu løsningerne

$$x = 5° + p \cdot 90° \quad , \quad x = 10° + p \cdot 90° \quad , \quad p = 90, 1, 2, 3 \ .$$

Specielt har vi de fire løsninger 5°, 10°, 95°, 100° i intervallet [0°;180°], og hvis vi kan vise, at der ikke kan være flere løsninger i dette interval, har vi samtidig fundet alle løs- ninger i [0°;360°].

Vi sætter for nemheds skyld $z = \tan x$. Additionsformlerne for tan giver, at ligningen er ensbetydende med

$$z = \frac{z + \tan 10°}{1 - z \cdot \tan 10°} \cdot \frac{z + \tan 20°}{1 - z \cdot \tan 20°} \cdot \frac{z + \tan 30°}{1 - z \cdot \tan 30°} \ .$$

Dette er en ligning ag 4. grad i z, så den har højst 4 løsninger. Da funktionen $\tan x$ er in- jektiv i [0°;180°] (bortset fra 90°) har vores ligning højst 4 løsninger i intervallet som ønsket.

Samtlige løsninger er dermed

$$x: \ 5° \ , \ 10° \ , \ 95° \ , \ 100° \ , \ 185° \ , \ 190° \ , \ 275° \ , \ 280° \ .$$

3. metode (Klaus Grünbaum).

Ved at sætte $y = x + 20°$ kan ligningen omskrives således:

$$\tan(y - 20°) = \tan(y - 10°) \cdot \tan y \cdot \tan(y + 10°)$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan(y - 20°) = \tan(y - 10°) \cdot \frac{1}{\tan(90° - y)} \cdot \tan(y + 10°)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\tan(y - 20°) \cdot \tan(90° - y) = \tan(y - 10°) \cdot \tan(y + 10°)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin(y-20°) \cdot \sin(90°-y)}{\cos(y-20°) \cdot \cos(90°-y)} = \frac{\sin(y-10°) \cdot \sin(y+10°)}{\cos(y-10°) \cdot \cos(y+10°)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\frac{1}{2}(\cos(2y-110°) - \cos 70°)}{\frac{1}{2}(\cos(2y-110°) + \cos 70°)} = \frac{\frac{1}{2}(\cos(-20°) - \cos 2y)}{\frac{1}{2}(\cos(-20°) + \cos 2y)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\cos(2y-110°) - \sin 20°}{\cos(2y-110°) + \sin 20°} = \frac{\cos 20° - \cos 2y}{\cos 20° + \cos 2y}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\cos(2y - 110°) - \sin 20°) \cdot (\cos 20° + \cos 2y)$$

$$= (\cos(2y - 110°) + \sin 20°) \cdot (\cos 20° - \cos 2y)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(2y - 110°) \cdot \cos 2y - \sin 20° \cdot \cos 20° = - \cos(2y - 110°) \cdot \cos 2y + \sin 20° \cdot \cos 20°$$

$$\Leftrightarrow \quad - 2\sin 20° \cdot \cos 20° + 2 \cos(2y - 110°) \cdot \cos 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 \cos(2y - 110°) \cdot \cos 2y = 2\sin 20° \cdot \cos 20°$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(-110°) + \cos(4y - 110°) = \sin 40°$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(4y - 110°) = \sin 40° + \cos 70°$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(4y - 110°) = \cos 50° - \cos 110°$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(4y - 110°) = -2 \cdot \sin 80° \cdot \sin(-30°)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(4y - 110°) = \cos 10° \quad \Leftrightarrow \quad 4y - 110° = \pm 10° + p \cdot 360°$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x + 80° - 110° = \pm 10° + p \cdot 360°$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x - 30° = \pm 10° + p \cdot 360°$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x = \begin{cases} 40° + p \cdot 360° \\ 10° + p \cdot 360° \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = \begin{cases} 10° + p \cdot 90° \\ 5° + p \cdot 90° \end{cases}$$

b. Bestem de gradtal x i [0°;360°], for hvilke

$$\tan x = \tan 2x \cdot \tan 3x \cdot \tan 4x \; .$$

1. metode.
Vi har, at

$$e^{iv} = \cos v + i \sin v \quad , \quad e^{-iv} = \cos v - i \sin v$$

så

$$e^{iv} - e^{-iv} = 2i \cdot \sin v \quad , \quad e^{iv} + e^{-iv} = 2\cos v \quad .$$

Division giver

$$i \cdot \tan v = \frac{e^{iv} - e^{-iv}}{e^{iv} + e^{-iv}} \; .$$

Ligningen får dermed udseendet

$$\frac{e^{iv} - e^{-iv}}{i \cdot (e^{iv} + e^{-iv})} = \frac{e^{2iv} - e^{-2iv}}{i \cdot (e^{2iv} + e^{-2iv})} \cdot \frac{e^{3iv} - e^{-3iv}}{i \cdot (e^{3iv} + e^{-3iv})} \cdot \frac{e^{4iv} - e^{-4iv}}{i \cdot (e^{4iv} + e^{-4iv})} \; .$$

For overskueligheds skyld sætter vi $k = e^{iv}$ og får

$$\frac{k - \frac{1}{k}}{k + \frac{1}{k}} = -\frac{k^2 - \frac{1}{k^2}}{k^2 + \frac{1}{k^2}} \cdot \frac{k^3 - \frac{1}{k^3}}{k^3 + \frac{1}{k^3}} \cdot \frac{k^4 - \frac{1}{k^4}}{k^4 + \frac{1}{k^4}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} = -\frac{k^4 - 1}{k^4 + 1} \cdot \frac{k^6 - 1}{k^6 + 1} \cdot \frac{k^8 - 1}{k^8 + 1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} = -\frac{(k^2 + 1)(k^2 - 1)}{k^4 + 1} \cdot \frac{k^6 - 1}{k^6 + 1} \cdot \frac{(k^4 - 1)(k^4 + 1)}{k^8 + 1} \quad .$$

Ved flittig brug af algebra reduceres denne ligning til

$$k^{14} + k^{12} - k^8 - k^6 + k^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k^{12}(k^2 + 1) - k^6(k^2 + 1) + (k^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (k^2 + 1)(k^{12} - k^6 + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = \pm i \;\vee\; k^6 = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{iv} = i \;\vee\; e^{iv} = -i \;\vee\; e^{6iv} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

De to første ligninger har løsningerne

$$v = 90° + p \cdot 360° \quad \text{og} \quad v = -90° + p \cdot 360°$$

som forkastes, da tan$v$ ikke er defineret for disse værdier.

Den sidste ligning har løsningerne

$$6v = \pm 60° \pm p \cdot 360° \;\;\Leftrightarrow\;\; v = \pm 10° \pm p \cdot 60° \;.$$

så de spidse vinkler er 10°, 50° og 70°. Vi har altså, at

$$\tan 10° = \tan 20° \cdot \tan 30° \cdot \tan 40°$$

$$\tan 50° = \tan 100° \cdot \tan 150° \cdot \tan 200° \quad\Leftrightarrow\quad \tan 50° = \tan 20° \cdot \tan 30° \cdot \tan 80°$$

$$\tan 70° = \tan 140° \cdot \tan 210° \cdot \tan 280° \quad\Leftrightarrow\quad \tan 70° = \tan 30° \cdot \tan 40° \cdot \tan 80°$$

2. metode (Jens Søren Andersen).
Hvis x er en løsning er også -x en løsning. Af periodiciteten af tan$x$ fremgår, at x er en løsning netop hvis x + 180° er en løsning. Desuden er x = 0° en løsning. Af opgave **a** ses, at x = 10° er en løsning.

Vi omskriver fra opgave **a** således:

$$\tan 10° = \tan 20° \cdot \tan 30° \cdot \tan 40°$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\tan 40°} = \frac{1}{-\tan 10°} \cdot (-\tan 30°) \cdot \tan 20°$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan 50° = \tan(-80°) \cdot \tan 150° \cdot \tan 200°$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan 50° = \tan(100°) \cdot \tan 150° \cdot \tan 200° \;.$$

Altså er x = 50° en løsning til ligningen. Vi kan også omskrive sådan:

$$\tan 10° = \tan 20° \cdot \tan 30° \cdot \tan 40° \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{\tan 20°} = \frac{1}{-\tan 10°} \cdot \tan 30° \cdot (-\tan 40°)$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan 70° = \tan 280° \cdot \tan 210° \cdot \tan 140° \quad\Leftrightarrow\quad \tan 70° = \tan 140° \cdot \tan 210° \cdot \tan 280° \;.$$

Altså er x = 70° en løsning til ligningen.
I intervallet]-90°;90°[har vi nu fundet de 7 løsninger

$$x \;:\; 0° \;,\; \pm 10° \;,\; \pm 50° \;,\; \pm 70° \;.$$

Nu får vi fra en velassorteret formelsamling at

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \quad , \quad \tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1-3\tan^2 x} \quad , \quad \tan 4x = \frac{\tan x(1-\tan^2 x)}{1-6\tan^2 x + \tan^4 x} \;,$$

og sætter vi z = tan$x$ får vi

$$\tan x = \tan 2x \cdot \tan 3x \cdot \tan 4x \quad\Leftrightarrow\quad z = \frac{2z}{1-z^2} \cdot \frac{3z - z^3}{1-3z^2} \cdot \frac{4z(1-z^2)}{1-6z^2+z^4}$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 - 3z^2)(1 - 6z^2 + z^4) = 8z(3z - z^3) \;.$$

Denne ligning er f 6. grad og har højst 6 løsninger. Tangens er injektiv i intervallet]-90°;90°[, så den oprindelige ligning har højst 6 løsninger forskellige fra 0°. Disse løs- ninger har vi allerede fundet. Ved brug af periodiciteten kan alle løsninger skrives:

$$x \;:\; 0° , 10° , 50° , 70° , -70° + 180° , -50° + 180° ,$$

$$-10° + 180° , 180° , 10° + 180° , 50° + 180° ,$$

$$70° + 180° , 110° + 180° , 170° + 180° , 360°$$

eller

$$x \;:\; 0° , 10° , 50° , 70° , 110° , 130° , 170° , 180° ,$$

$$190° , 230° , 250° , 290° , 350° , 360° \;.$$

3. metode (Palle Bak Petersen).
Vi må forudsætte, at

$$x \neq 90° + p \cdot 180° \ \ , \ \ x \neq 45° + p \cdot 90° \ \ , \ \ x \neq 30° + p \cdot 60° \ \ , \ \ x \neq 22{,}5° + p \cdot 45° \ .$$

Vi omskriver ligningen således:

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \cdot \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \cdot \frac{\sin 4x}{\cos 4x}$$

$$\Leftrightarrow \ \sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x \cdot \cos 4x = \cos x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \cdot \sin 4x$$

$$\Leftrightarrow \ (\sin x \cdot \cos 4x) \cdot (\cos 2x \cdot \cos 3x) = (\cos x \cdot \sin 4x) \cdot (\sin 2x \cdot \sin 3x)$$

$$\Leftrightarrow \ \tfrac{1}{2}(\sin(-3x) + \sin 5x) \cdot \tfrac{1}{2}(\cos(-x) + \cos 5x) = \tfrac{1}{2}(\sin 3x + \sin 5x) \cdot \tfrac{1}{2}(\cos(-x) - \cos 5x)$$

$$\Leftrightarrow \ (\sin 5x - \sin 3x)(\cos x + \cos 5x) = (\sin 3x + \sin 5x)(\cos x - \cos 5x)$$

$$\Leftrightarrow \ \sin 5x \cdot \cos x + \sin 5x \cdot \cos 5x - \sin 3x \cdot \cos x - \sin 3x \cdot \cos 5x$$

$$= \sin 3x \cdot \cos x - \sin 3x \cdot \cos 5x + \sin 5x \cdot \cos x - \cos 5x \cdot \sin 5x$$

$$\Leftrightarrow \ 2\sin 5x \cdot \cos 5x = 2\sin 3x \cdot \cos x \quad \Leftrightarrow \quad \sin 10x = \sin 2x + \sin 4x$$

$$\Leftrightarrow \ \sin 4x = \sin 10x - \sin 2x \quad \Leftrightarrow \quad \sin 4x = 2\cos 6x \cdot \sin 4x$$

$$\Leftrightarrow \ \sin 4x \cdot (1 - 2\cos 6x) \quad \Leftrightarrow \quad \sin 4x = 0 \ \vee \ \cos 6x = \tfrac{1}{2} \ .$$

Den første ligning har løsningerne

$$4x = 0° + p \cdot 180° \quad \Leftrightarrow \quad x = 0° + p \cdot 45° \ .$$

Her er kun 0°, 180° og 360° løsninger.
Den anden ligning giver

$$6x = 60° + p \cdot 360° \quad \vee \quad 6x = 300° + p \cdot 360°$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 10° + p \cdot 60° \quad \vee \quad x = 50° + p \cdot 60° \ .$$

Løsningerne er i alt:

$$x : \ 0° , 10° , 50° , 70° , 110° , 130° , 170° , 180° ,$$

$$190° , 230° , 250° , 290° , 310° , 350° , 360° \ .$$

4. metode (Klaus Grünbaum).
Med passende forudsætninger omskrives ligningen til

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \cdot \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \cdot \frac{\sin 4x}{\cos 4x}$$

$$\Leftrightarrow \ \sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x \cdot \cos 4x = \cos x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \cdot \sin 4x \ . \qquad (1)$$

Nu er

$$\sin 3x = \sin x(3 - 4\sin^2 x) \quad , \quad \cos 3x = \cos x(1 - 4\sin^2 x) \quad ,$$

$$\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x + 8\sin^4 x \ .$$

Så er ligningen (1) ensbetydende med

$$\sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos x \cdot (1 - 4\sin^2 x) \cdot (1 - 8\sin^2 x + 8\sin^4 x)$$

$$= \cos x \cdot 2\sin x \cdot \cos x \cdot \sin x \cdot (3 - 4\sin^2 x) \cdot 2\sin 2x \cdot \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \ (1 - 4\sin^2 x) \cdot (1 - 8\sin^2 x + 8\sin^4 x) = 4\cos x \cdot \sin x \cdot (3 - 4\sin^2 x) \cdot 2\sin x \cdot \cos x \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 - 4\sin^2 x)\cdot(1 - 8\sin^2 x + 8\sin^4 x) = 8\cos^2 x\cdot\sin^2 x\cdot(3 - 4\sin^2 x)\ .$$

Vi sætter for nemheds skyld $y = \sin^2 x$ og får ligningen

$$(1 - 4y)\cdot(1 - 8y + 8y^2) = 8(1 - y)\cdot y\cdot(3 - 4y)$$

$$\Leftrightarrow \quad 64y^3 - 96y^2 + 36y - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4y(16y^2 - 24y + 9) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 4y(3 - 4y)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4\sin^2 x\cdot(3 - 4\sin^2 x)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\sin^2 3x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin 3x = \pm\tfrac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x = \pm 30^\circ + p\cdot 180^\circ \quad \Leftrightarrow \quad 3x = \pm 10^\circ + p\cdot 60^\circ$$

c. Vis, at $\dfrac{\sin 50^\circ}{\sin 70^\circ} + \dfrac{\sin 70^\circ}{\sin 10^\circ} - \dfrac{\sin 10^\circ}{\sin 50^\circ} = 6$.

1. metode.
Vi omskriver venstre side til

$$\frac{t}{n} = \frac{\sin^2 50^\circ\cdot\sin 10^\circ + \sin^2 70^\circ\cdot\sin 50^\circ - \sin^2 10^\circ\cdot\sin 70^\circ}{\sin 10^\circ\cdot\sin 50^\circ\cdot\sin 70^\circ}\ .$$

Vi udregner først nævneren ved følgende omskrivning:

$$2n\cdot\cos 10^\circ = 2\sin 10^\circ\cdot\cos 10^\circ\cdot\sin 50^\circ\cdot\sin 70^\circ = \sin 20^\circ\cdot\sin 50^\circ\cdot\sin 70^\circ$$

$$= \sin 20^\circ\cdot\sin 50^\circ\cdot\cos 20^\circ = \tfrac{1}{2}\sin 40^\circ\cdot\sin 50^\circ = \tfrac{1}{2}\sin 40^\circ\cdot\cos 40^\circ = \tfrac{1}{4}\sin 80^\circ = \tfrac{1}{4}\cos 10^\circ\ .$$

Altså er

$$2n\cdot\cos 10^\circ = \tfrac{1}{4}\cos 10^\circ \quad \Leftrightarrow \quad n = \tfrac{1}{8}\ .$$

For at udregne tælleren benytter vi formlerne

$$\sin x\cdot\sin y = \tfrac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$$

$$\sin x\cdot\cos y = \tfrac{1}{2}(\sin(x + y) + \sin(x - y))\ ,$$

og får

$$t = \sin 50^\circ\cdot\left(\tfrac{1}{2}(\cos 40^\circ - \cos 60^\circ)\right) + \sin 70^\circ\cdot\left(\tfrac{1}{2}(\cos 20^\circ - \cos 120^\circ)\right)$$

$$- \sin 10^\circ\cdot\left(\tfrac{1}{2}(\cos 60^\circ - \cos 80^\circ)\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\sin 50^\circ\cdot\left(\cos 40^\circ - \tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{1}{2}\sin 70^\circ\cdot\left(\cos 20^\circ + \tfrac{1}{2}\right) - \tfrac{1}{2}\sin 10^\circ\cdot\left(\tfrac{1}{2} - \cos 80^\circ\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\sin 50^\circ\cdot\cos 40^\circ - \tfrac{1}{4}\sin 50^\circ + \tfrac{1}{2}\sin 70^\circ\cdot\cos 20^\circ + \tfrac{1}{4}\sin 70^\circ$$

$$+ \tfrac{1}{2}\sin 10^\circ\cdot\cos 80^\circ - \tfrac{1}{4}\sin 10^\circ$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}(\sin 90^\circ + \sin 10^\circ)\right) - \tfrac{1}{4}\sin 50^\circ + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}(\sin 90^\circ + \sin 50^\circ)\right)$$

$$+ \tfrac{1}{4}\sin 70^\circ - \tfrac{1}{4}\sin 10^\circ + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}(\sin 90^\circ + \sin(-70^\circ))\right)$$

$$= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\sin 10^\circ - \tfrac{1}{4}\sin 50^\circ + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\sin 50^\circ + \tfrac{1}{4}\sin 70^\circ - \tfrac{1}{4}\sin 10^\circ + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\sin 70^\circ$$

$$= \tfrac{3}{4}\ .$$

Dermed er $$\frac{t}{n}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{8}}=6.$$

2. metode (Klaus Grünbaum).
I ligningen
$$\frac{\sin 50°}{\sin 70°}+\frac{\sin 70°}{\sin 10°}-\frac{\sin 10°}{\sin 50°}=6 \qquad (1)$$
sætter vi x = 20°. Så fås
$$\frac{\cos 50°}{\cos 70°}+\frac{\cos 70°}{\cos 10°}-\frac{\cos 10°}{\cos 40°}=6 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\cos 2x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\cos 4x}-\frac{\cos 4x}{\cos 2x}=6$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos^2 2x\cdot\cos 4x + \cos^2 x\cdot\cos 2x - \cos x\cdot\cos^2 4x = 6\cdot\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\ . \qquad (2)$$
Nu er
$$\cos 3x = \cos 60° = \tfrac{1}{2}\ ,\ \cos 5x = \cos 100° = -\cos 80° = -\cos 4x\ ,$$
$$\cos 6x = \cos 120° = -\tfrac{1}{2}\ ,\ \cos 8x = \cos 160° = -\cos 20° = -\cos x\ ,$$
$$\cos^2 4x = \tfrac{1}{2}(1+\cos 8x) = \tfrac{1}{2}(1-\cos x)\ .$$
Dermed er (2) ensbetydende med
$$\cos 2x\cdot(\cos 2x\cdot\cos 4x) + \cos x\cdot(\cos x\cdot\cos 2x) - \cos 4x\cdot(\cos x\cdot\cos 4x)$$
$$= 6\cos x\cdot(\cos 2x\cdot\cos 4x)$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos 2x\cdot\tfrac{1}{2}(\cos(-2x)+\cos 6x) + \cos x\cdot\tfrac{1}{2}(\cos(-x)+\cos 3x)$$
$$-\cos 4x\cdot\tfrac{1}{2}(\cos(-3x)+\cos 5x) = 6\cos x\cdot\tfrac{1}{2}(\cos(-2x)+\cos 6x)$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos^2 2x + \cos 2x\cdot\cos 6x + \cos^2 x + \cos x\cdot\cos 3x - \cos 4x\cdot\cos 3x - \cos 4x\cdot\cos 5x$$
$$= 6\cos x\cdot\cos 2x + 6\cos x\cdot\cos 6x$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos^2 2x - \tfrac{1}{2}\cos 2x + \cos^2 x + \tfrac{1}{2}\cos x - \tfrac{1}{2}\cos 4x + \cos^2 4x = 6\cos x\cdot\cos 2x - 3\cos x$$
$$\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}(1+\cos 4x) - \tfrac{1}{2}\cos 2x + \cos^2 x + \tfrac{1}{2}\cos x - \tfrac{1}{2}\cos 4x + \tfrac{1}{2}(1+\cos 8x)$$
$$= 6\cos x\cdot\cos 2x - 3\cos x$$
$$\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 4x - \tfrac{1}{2}\cos 2x + \cos^2 x + \tfrac{1}{2}\cos x - \tfrac{1}{2}\cos 4x + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos x$$
$$= 6\cos x\cdot\cos 2x - 3\cos x$$
$$\Leftrightarrow \quad 1 - \tfrac{1}{2}\cos 2x + \cos^2 x = 6\cos x\cdot\cos 2x - 3\cos x$$
$$\Leftrightarrow \quad 1 - \tfrac{1}{2}(2\cos^2 x - 1) + \cos^2 x = 6\cos x\cdot(2\cos^2 x - 1) - 3\cos x$$
$$\Leftrightarrow \quad 1 - \cos^2 x + \tfrac{1}{2} + \cos^2 x = 12\cos^3 x - 6\cos x - 3\cos x$$
$$\Leftrightarrow \quad \tfrac{3}{2} = 12\cos^3 x - 9\cos x \quad \Leftrightarrow \quad 3 = 6(4\cos^3 x - 3\cos x)$$
$$\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2} = 4\cos^3 x - 3\cos x \quad \Leftrightarrow \quad \cos 3x = \tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos 60° = \tfrac{1}{2}\ ,$$
og dette er sandt. Derfor er (1) også sand.

d. Vis, at $\cos 84° = 4\sin 24° \cdot \cos 72° \cdot \cos 78°$.

1. metode.
Vi omskriver venstre side:

$$v = \cos 84° = \cos(120° - 36°) = \cos 120° \cdot \cos 36° + \sin 120° \cdot \sin 36°$$

$$= -\tfrac{1}{2}\cos 36° + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 36°. \qquad (1)$$

Desuden er

$$2\cos x \cdot \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y) \quad \text{og} \quad 2\sin x \cdot \cos y = \sin(x - y) + \sin(x + y) ,$$

så højre side omskrives til

$$h = 2\sin 24° \cdot 2\cos 72° \cdot \cos 78° = 2\sin 24° \cdot (\cos(-6°) + \cos 150°)$$

$$= 2\sin 24° \cdot (\cos 6° - \tfrac{\sqrt{3}}{2}) = -\sqrt{3}\sin 24° + 2\sin 24° \cdot \cos 6°$$

$$= -\sqrt{3}\sin 24° + \sin 18° + \sin 30° = -\sqrt{3}\sin(60° - 36°) + \sin 18° + \tfrac{1}{2}$$

$$= -\sqrt{3}(\sin 60° \cdot \cos 36° - \cos 60° \cdot \sin 36°) + \sin 18° + \tfrac{1}{2}$$

$$= -\tfrac{3}{2}\cos 36° + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 36° + \sin 18° + \tfrac{1}{2} . \qquad (2)$$

Efter (1) og (2) skal vi vise, at

$$-\tfrac{1}{2}\cos 36° + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 36° = -\tfrac{3}{2}\cos 36° + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 36° + \sin 18° + \tfrac{1}{2} ,$$

som er ensbetydende med, at

$$\cos 36° = \sin 18° + \tfrac{1}{2} . \qquad (3)$$

Nu er det kendt (!), at

$$\cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \quad \text{og} \quad \sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4} ,$$

hvoraf (3) fremgår.

2. metode (Jens Søren Andersen).
Vi omskriver formlen således:

$$\cos 84° = 4 \cdot \sin 24° \cdot \cos 72° \cdot \cos 78° \quad \Leftrightarrow \quad \sin 6° = 4 \cdot \sin 24° \cdot \cos 72° \cdot \sin 12°$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 6° = 4 \cdot \sin 24° \cdot \cos 72° \cdot 2 \cdot \sin 6° \cdot \cos 6° \quad \Leftrightarrow \quad 8 \cdot \sin 24° \cdot \cos 72° \cdot \cos 6° = 1 .$$

Vi minder om det gyldne snits tal

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} .$$

Det er kendt (!), at

$$\cos 72° = \frac{1}{2\Phi} = \frac{1}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} .$$

Der gælder, at

$$\Phi^2 = \Phi + 1 \quad \text{og dermed} \quad \frac{1}{\Phi} = \Phi - 1 .$$

Så får vi

$$\cos^2 36° = \tfrac{1}{2}(1+\cos 72°) = \tfrac{1}{2}(1+\tfrac{1}{2\Phi}) = \tfrac{1}{2}(1+\tfrac{1}{2}(\Phi-1)) = \tfrac{1}{4}(\Phi+1) = \tfrac{1}{4}\Phi^2 ,$$

hvoraf

$$\cos 36° = \tfrac{1}{2}\Phi \ .$$

Videre er

$$\sin^2 36° = 1-\cos^2 36 = 1-\tfrac{1}{4}\Phi^2 = \tfrac{1}{4}(4-\Phi^2) = \tfrac{1}{4}(4-\Phi-1) = \tfrac{1}{4}(3-\Phi) \ ,$$

hvoraf

$$\sin 36° = \tfrac{1}{2}\sqrt{3-\Phi} \ .$$

Dernæst får vi

$$\cos 6° = \cos(36° - 30°) = \cos 36° \cdot \cos 30° + \sin 36° \cdot \sin 30°$$

$$= \frac{\Phi}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3-\Phi}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\left(\Phi\sqrt{3} + \sqrt{3-\Phi}\right) \ ,$$

$$\sin 24° = \sin(60° - 36°) = \sin 60° \cdot \cos 36° - \cos 60° \cdot \sin 36°$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\Phi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3-\Phi}}{2} = \frac{1}{4}\left(\Phi\sqrt{3} - \sqrt{3-\Phi}\right) .$$

Så får vi

$$8 \cdot \sin 24° \cdot \cos 72° \cdot \cos 6° = 8 \cdot \tfrac{1}{4}\left(\Phi\sqrt{3} - \sqrt{3-\Phi}\right) \cdot \tfrac{1}{2\Phi} \cdot \tfrac{1}{4}\left(\Phi\sqrt{3} + \sqrt{3-\Phi}\right)$$

$$\tfrac{1}{4\Phi}\left(3\Phi^2 - (3-\Phi)\right) = \tfrac{1}{4\Phi}\left(3(\Phi+1) - (3-\Phi)\right) = \tfrac{1}{4\Phi}\left(4\Phi\right) = 1.$$

3.metode (Palle Bak Petersen).
Vi får, at

$$\cos 84° = 4 \cdot \sin 24° \cdot \cos 72° \cdot \cos 78° \quad \Leftrightarrow \quad \sin 6° = 4 \cdot \sin 24° \cdot \sin 18° \cdot \sin 12° \ .$$

Vi vil derfor undersøge ligningen

$$\sin x = 4\sin 2x \cdot \sin 3x \cdot \sin 4x \ ,$$

og vise, at $x = 6°$ er løsning.

Ligningen er ensbetydende med, at

$$\sin x = 4\sin 3x \cdot (\sin 2x \cdot \sin 4x) \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = 4\sin 3x \cdot \tfrac{1}{2}(\cos(-2x) - \cos 6x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x = 2\sin 3x \cdot (\cos 2x - \cos 6x) \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = 2(3\sin x - 4\sin^3 x)(\cos 2x - \cos 6x)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(3 - 4\sin^2 x)(\cos 2x - \cos 6x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2(3 - 4 \cdot \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x))(\cos 2x - \cos 6x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(1 + 2\cos 2x)(\cos 2x - \cos 6x) \quad \Leftrightarrow \quad \cos 2x - \cos 6x + 2\cos^2 2x - 2\cos 2x \cdot \cos 6x = \tfrac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 2x - \cos 6x + 1 + \cos 4x - (\cos(-4x) + \cos 8x)) = \tfrac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\tfrac{1}{2} = \cos 2x - \cos 6x + \cos 4x - \cos 4x - \cos 8x$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 8x + \cos 6x - \cos 2x = \tfrac{1}{2} \ .$$

Vi skal altså udregne tallet

$$k = \cos 48° + \cos 36° - \cos 12°.$$

Det er kendt fra det trigonometriske formelmaskineri, at

$$\sin 18° = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\right) \quad \text{og} \quad \cos^2 18° = \tfrac{1}{8}\left(5+\sqrt{5}\right) .$$

Vi får derefter

$$\cos 48° - \cos 12° = -2\sin 30° \cdot \sin 18° = -\sin 18°$$

og

$$\cos 36° = 2\cos^2 18° - 1 = \tfrac{1}{4}\left(5+\sqrt{5}\right) - 1 ,$$

så

$$k = -\sin 18° + \cos 36° = -\tfrac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\right) + \tfrac{1}{4}\left(5+\sqrt{5}\right) - 1 = \tfrac{1}{2} .$$

e. Vis, at $\tfrac{1}{2}\tan 40° + \tan 10° + \dfrac{\sin 10°}{\sin 40°} = \tfrac{1}{2}\tan 60°$.

1. metode (Jens Søren Andersen).
Vi bruger formlen

$$\tan x - \tan y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y}$$

og får, at

$$\tfrac{1}{2}(\tan 60° - \tan 40°) = \frac{\sin(60°-40°)}{2\cos 60° \cdot \cos 40°} = \frac{\sin 20°}{\cos 40°} .$$

Vi omskriver formlen således:

$$\tfrac{1}{2}(\tan 60° - \tan 40°) = \tan 10° + \frac{\sin 10°}{\sin 40°} \quad \Leftrightarrow \quad \tan 10° + \frac{\sin 10°}{\sin 40°} = \frac{\sin 20°}{\cos 40°}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 40° \cdot \cos 40° \cdot \frac{1}{\tan 80°} + \sin 10° \cdot \cos 40° = \sin 20° \cdot \sin 40°$$

$$\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2} \cdot \sin 80° \cdot \frac{1}{\tan 80°} + \sin 10° \cdot \cos 40° = 2\sin 10° \cdot \cos 10° \cdot \cos 50°$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 80° + 2\sin 10° \cdot \cos 40° = 4\sin 10° \cdot \cos 10° \cdot \cos 50° . \tag{1}$$

Nu er

$$4 \cdot \cos 50° \cdot \cos 10° = 2(\cos(50° + 10°) + \cos(50° - 10°)) = 1 + 2\cos 40° ,$$

så ligningen (1) kan omskrives til

$$\cos 80° + 2\sin 10° \cdot \cos 40° = \sin 10° \cdot (1 + 2\cos 40°)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 10° + 2\sin 10° \cdot \cos 40° = \sin 10° \cdot (1 + 2\cos 40°) ,$$

hvilket er sandt.

2. metode (Klaus Grünbaum).
Vi omskriver ligningen således:

$$\tfrac{1}{2}\tan 40° + \tan 10° + \frac{\sin 10°}{\sin 40°} = \tfrac{1}{2}\tan 60°$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin 40°}{2\cos 40°} + \frac{\sin 10°}{\cos 10°} + \frac{\sin 10°}{\sin 40°} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 40° \cdot \cos 10° + 2\sin 10° \cdot \cos 40° \cdot \sin 40° + 2\sin 10° \cdot \cos 10° \cdot \cos 40°$$

$$= \sqrt{3} \cdot \cos 10° \cdot \sin 40° \cdot \cos 40°$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 40° \cdot \sin 80° + \sin 10° \cdot \sin 80° + \sin 20° \cdot \sin 50° = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \sin 80° \cdot \sin 80°$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 40° \cdot \tfrac{1}{2}(\cos(-40°) - \cos 120°) + \tfrac{1}{2}(\cos(-70°) - \cos 90°) + \tfrac{1}{2}(\cos(-30°) - \cos 70°)$$
$$= \tfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \tfrac{1}{2}(1 - \cos 160°)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 40° \cdot (\cos 40° + \tfrac{1}{2}) + \cos 70° + \tfrac{\sqrt{3}}{2} - \cos 70° = \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2} \cos 20°$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 40° \cdot \cos 40° + \tfrac{1}{2} \sin 40° = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \cos 20°$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 80° + \sin 40° = \sqrt{3} \cdot \cos 20° \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot \sin 60° \cdot \cos 20° = \sqrt{3} \cdot \cos 20° \,,$$

hvilket er sandt.

3. metode (Asger Olesen).
Vi får først

$$\tan 50° = \tan(40° + 10°) = \frac{\tan 40° + \tan 10°}{1 - \tan 40° \cdot \tan 10°}$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan 50° \cdot (1 - \tan 40° \cdot \tan 10°) = \tan 40° + \tan 10°$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan 50° - \tan 50° \cdot \tan 40° \cdot \tan 10° = \tan 40° + \tan 10°$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan 50° = \tan 40° + \tan 10° + \tan 50° \cdot \tan 40° \cdot \tan 10°$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan 50° = \tan 40° + \tan 10° + \cot 40° \cdot \tan 40° \cdot \tan 10°$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan 50° = \tan 40° + \tan 10° + \tan 10°$$

$$\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2} \tan 40° + \tan 10° = \tfrac{1}{2} \tan 50° \,.$$

Den formel, vi skal vise, er derfor ensbetydende med

$$\tfrac{1}{2} \tan 50° + \frac{\sin 10°}{\sin 40°} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \tan 50° + \frac{2 \sin 10°}{\sin 40°} = \sqrt{3} \,.$$

Vi reducerer venstre side af lighedstegnet:

$$\tan 50° + \frac{2 \sin 10°}{\sin 40°} = \cot 40° + \frac{2 \sin 10°}{\sin 40°} = \frac{\cos 40° + 2 \sin 10°}{\sin 40°} = \frac{\cos 40° + 2 \cos 80°}{\sin 40°}$$

$$= \frac{(\cos 40° + \cos 80°) + \cos 80°}{\sin 40°} = \frac{2 \cdot \cos 60° \cdot \cos 20° + \cos 80°}{\sin 40°} = \frac{\cos 20° + \cos 80°}{\sin 40°}$$

$$= \frac{2 \cdot \cos 50° \cdot \cos 30°}{\sin 40°} = \frac{\cos 50° \cdot \sqrt{3}}{\sin 40°} = \frac{\sqrt{3} \cdot \cos 50°}{\cos 50°} = \sqrt{3} \,,$$

hvilket er det ønskede.

4. metode.
Lad ΔABC være en 30°-60°-90°-trekant, hvor $C = 90°$, $A = 60°$ og $B = 30°$. Så er $c = 2b$. Punkterne D og E ligger på BC, så

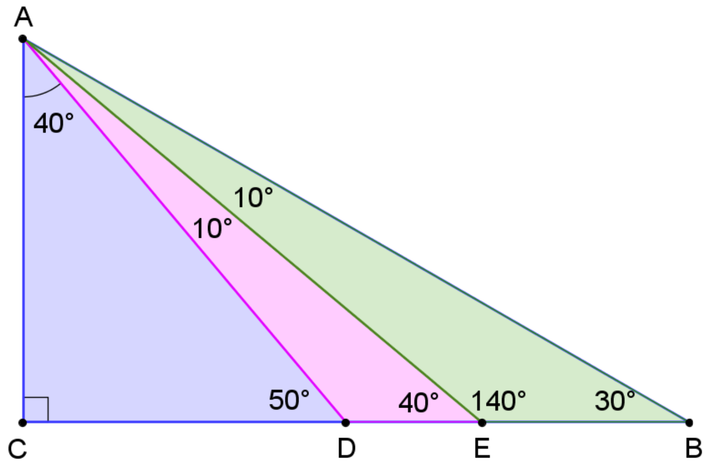
$$\angle CAD = 40° \,,\ \angle BAE = \angle EAD = 10°.$$

Vi sætter

$$x = CD \ ,\ y = DE \ ,\ z = EB \,.$$

I ΔACD er

$$x = b \cdot \tan 40° \quad \text{og} \quad AD = \frac{b}{\cos 40°} \ .$$



I ΔADE giver sinusrelationen

$$\frac{y}{\sin 10°} = \frac{AD}{\sin 40°} \ ,$$

hvoraf

$$y = \frac{AD \cdot \sin 10°}{\sin 40°} = \frac{b \cdot \sin 10°}{\cos 40° \cdot \sin 40°} = \frac{2b \cdot \sin 10°}{\sin 80°} = \frac{2b \cdot \sin 10°}{\cos 10°} = 2b \cdot \tan 10°.$$

kI ΔAEB giver sinusrelationen

$$\frac{z}{\sin 10°} = \frac{c}{\sin 140°} \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{c \cdot \sin 10°}{\sin 40°} = \frac{2b \cdot \sin 10°}{\sin 40°} \ .$$

I ΔABC er $a = b \cdot \tan 60°$, så vi nu får

$$a = x + y + z \quad \Leftrightarrow \quad b \cdot \tan 60° = b \cdot \tan 40° + 2b \cdot \tan 10° + \frac{2b \cdot \sin 10°}{\sin 40°}$$

$$\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2} \cdot \tan 60° = \tfrac{1}{2} \cdot \tan 40° + \tan 10° + \frac{\sin 10°}{\sin 40°} \ ,$$

hvilket er det ønskede.

Besvarelser modtaget fra:
- Jens-Søren Andersen,
- Roger Bengtsson
- Hans Benner
- Klaus Grünbaum
- Walther Janous
- Hans Mortensen
- Asger Olesen
- Jan Erik Pedersen
- Palle Bak Petersen.