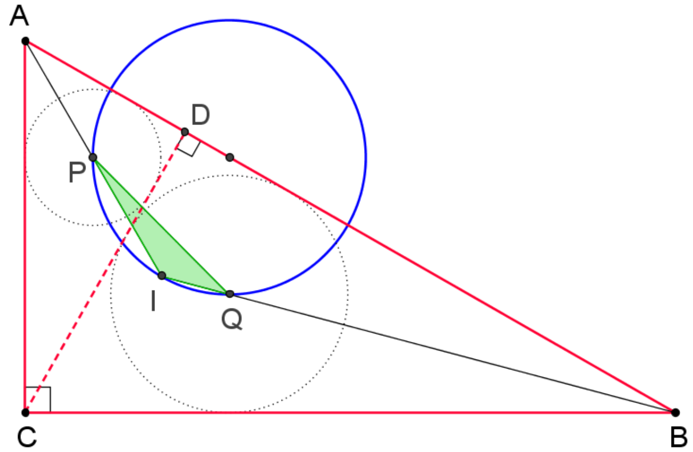
Svar på opgave 367 (Februar 2020)

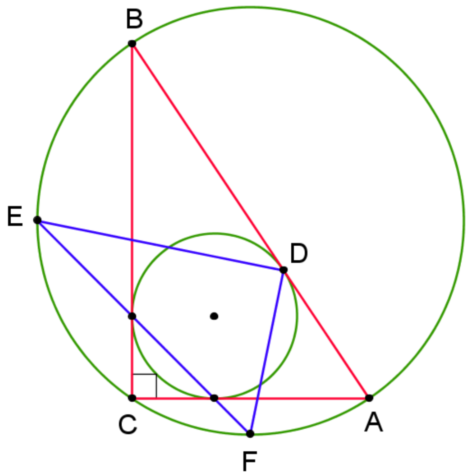
Opgave:

Den retvinklede trekant

a. I den retvinklede ΔABC er $C = 90°$ og D er fodpunktet på hypotenusen af højden fra C.
Lad P, Q og I være centrer for de indskrevne cirkler i ΔACD, ΔBCD og ΔABC.
Vis, at centrum for den omskrevne cirkel for ΔQIP ligger på hypotenusen AB.



b. I den retvinklede ΔABC er $C = 90°$. Den indskrevne cirkel tangerer BA i D. I den omskrevne cirkel er punkterne E og F midtpunkter af de korte buer BC og AC. Vis, at ΔDEF og ΔABC er ensvinklede, og at EF går gennem den indskrevne cirkels røringspunkter med BC og AC.



Besvarelse:

a.

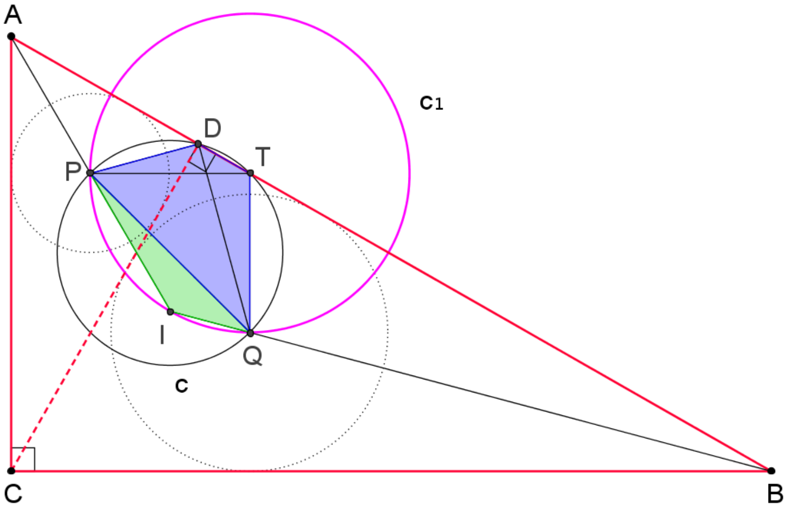
1. metode.

Den omskrevne cirkel c for ΔPQD skærer AB i D og T. Nu er DP og DQ vinkelhalveringslinjer for nabovinklerne ADB og CDB. Altså er $\angle PDQ = 90°$ og $\angle QDB = 45°$.

Da $\square PDTQ$ er indskrivelig, er

$$\angle PTQ = \angle PDQ = 90° \quad \text{og} \quad \angle QPT = \angle QDT = \angle QDB = 45° \ .$$

Dette medfører, at ΔPTQ ligebenet og retvinklet.



Lad c_1 være cirklen gennem P og Q med centrum i T. Vi har, at B, Q og I ligger på linje og at A, P og I ligger på linje, fordi BI og AI er vinkelhalveringslinjer for B og A.
I ΔAIB er så

$$\angle AIB = 180° - \tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B = 180° - \tfrac{1}{2}(A+B) = 180° - \tfrac{1}{2}\cdot 90° = 135°.$$

I c_1 er buen PQ = 90°, da $\angle PTQ = 90°$. Dermed er gradtallet for den resterende bue PQ 270°. Altså går c_1 gennem I og c_1 er den omskrevne cirkel for ΔQIP. Centrum for c_1 er T, som ligger på hypotenusen.

I øvrigt er T røringspunkt for den indskrevne cirkel i ΔABC.

2. metode.

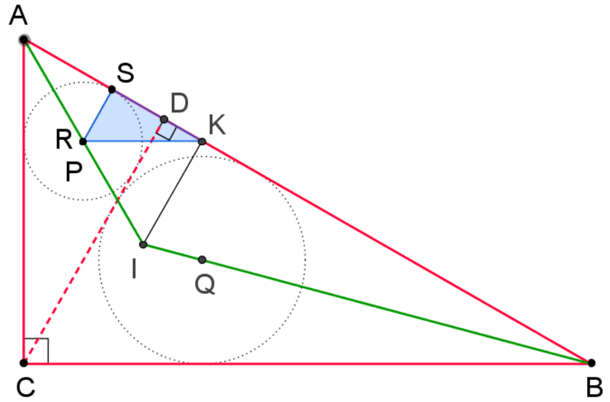
Lad r og r_1 være radier for de indskrevne cirkler i ΔABC og ΔACD. Da de to trekanter er ensvinklede med hypotenuserne c og b, er

$$r_1 = \tfrac{b}{c} r \ .$$

Lad K være projektionen af I på AB og lad desuden R være et punkt på linjestykket AI, så ΔKRI er ligebenet med toppunkt i K, dvs. $RK = KI$. Endelig er S projektionen af R på AB.

Vi har, at $\angle KAI = \tfrac{1}{2}A$, så

$$\angle KRI = \angle KIA = 90° - \tfrac{1}{2}A$$



og dermed fås i ΔKRI, at $\angle RKI = A$. Da

$IK \parallel RS$, er

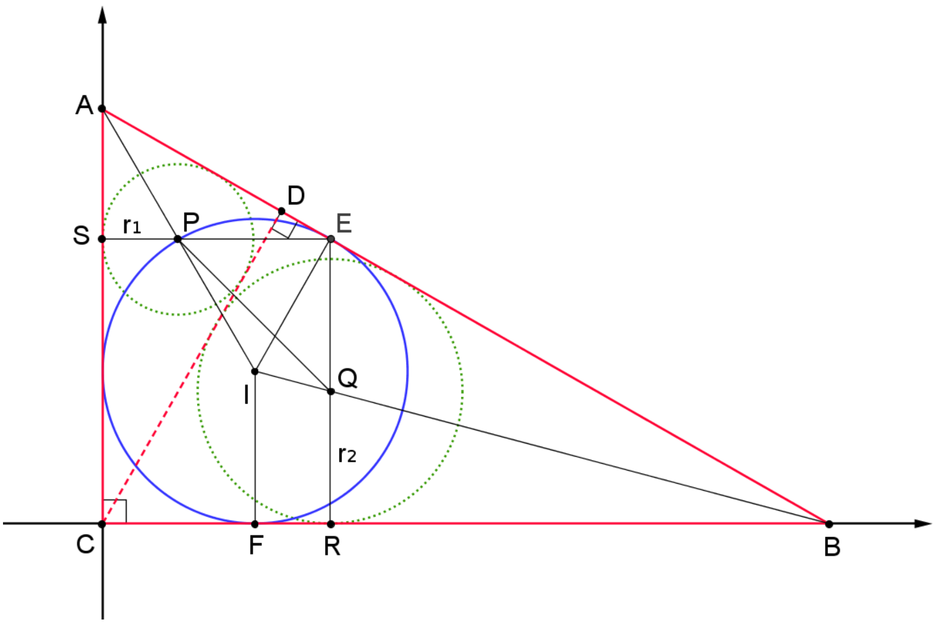
$$\angle KRS = \angle RKI = A\,.$$

Dermed er ΔRKS og ΔABC ensvinklede, så

$$\frac{RS}{AC} = \frac{RK}{AB} \quad \Leftrightarrow \quad RS = RK \cdot \frac{b}{c} \quad \Leftrightarrow \quad RS = KI \cdot \frac{b}{c} \quad \Leftrightarrow \quad RS = r \cdot \frac{b}{c} = r_1\,.$$

Det eneste punkt på linjestykket AI, der har afstanden r_1 ril AB er P, så P falder sammen med R. Derfor er $PK = IK$. På samme måde er $QK = IK$. Altså er $PK = IK = QK$, så K er centrum for den omskrevne cirkel for ΔQIP.

3. metode.
I en trekant med omkreds $2s$ og areal T gælder som bekendt for radius r til den indskrevne cirkel, at $T = r \cdot s$. Radius r i den indskrevne cirkel i ΔABC er altså



$$r = \frac{\frac{1}{2}ab}{\frac{1}{2}(a+b+c)} = \frac{ab}{2s}\,.$$

Nu er ΔACD og ΔABC ensvinklede med sideforholdet $\frac{b}{c}$ (forholdet mellem hypotenuserne), så radius r_1 i den indskrevne cirkel for ΔACD er dermed

$$r_1 = \frac{b}{c} r = \frac{b}{c} \cdot \frac{ab}{2s} = \frac{ab^2}{2cs}\,.$$

På samme måde er ΔBCD og ΔABC ensvinklede med sideforholdet $\frac{a}{c}$, så radius r_2 for den indskrevne cirkel i ΔBCD er

$$r_2 = \frac{a}{c} r = \frac{a}{c} \cdot \frac{ab}{2s} = \frac{a^2 b}{2cs}\,.$$

Lad projektionen af P på AC være S og projektionen af Q på BC være R. Så er

$$\tan\tfrac{A}{2} = \frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{\frac{a}{c}}{1+\frac{b}{c}} = \frac{a}{b+c} \quad \text{og} \quad \tan\tfrac{B}{2} = \frac{b}{a+c} \ ,$$

og i ΔASP fås

$$\tan\tfrac{A}{2} = \frac{SP}{AS} \quad \Leftrightarrow \quad AS = \frac{r_1}{\tan\frac{A}{2}} \ ,$$

hvoraf

$$AS = \frac{\frac{ab^2}{2cs}}{\frac{a}{b+c}} = \frac{b^2(b+c)}{2cs} \ .$$

Så er

$$CS = b - AS = b - \frac{b^2(b+c)}{2cs} = \frac{ab(a+c)}{2cs} \ .$$

Tilsvarende er

$$BR = \frac{a^2(a+c)}{2cs} \quad \text{og} \quad CR = a - BR = \frac{ab(b+c)}{2cs} \ .$$

Vi betragter et koordinatsystem med begyndelsespunkt C og CB som x-akse orienteret fra C mod B og CA som y-aksen orienteret fra C mod A. Så er koordinaterne til P og Q:

$$\left(x_P, y_P\right) = \left(\frac{ab^2}{2cs}, \frac{ab(a+c)}{2cs}\right) \quad \text{og} \quad \left(x_Q, y_Q\right) = \left(\frac{ab(b+c)}{2cs}, \frac{a^2 b}{2cs}\right) \ .$$

Koordinaterne til centrum I for den indskrevne cirkel i ΔABC er

$$\left(x_I\,, y_I\right) = \left(r, r\right) = \left(\frac{ab}{2s}, \frac{ab}{2s}\right).$$

I ΔABC er

$$EB = FB = \frac{r}{\tan\frac{B}{2}} = \frac{ab}{2s}\cdot\frac{a+c}{b} = \frac{a(a+c)}{2s} \ .$$

Dermed er y-koordinaten til E:

$$y_E = EB \cdot \sin B = \frac{a(a+c)\cdot b}{2s\cdot c} \ ,$$

og x-koordinaten til E er

$$x_E = a - EB\cdot\cos B = a - \frac{a(a+c)\cdot a}{2s\cdot c} \ ,$$

hvilket ved et orgie af træls algebra reduceres til

$$y_E = \frac{ab(b+c)}{2sc} \ .$$

Altså har vi koordinatsættet

$$\left(x_E\,, y_E\right) = \left(\frac{ab(b+c)}{2sc}, \frac{ab(a+c)}{2sc}\right).$$

Vi får vektorkoordinaterne

$$\overrightarrow{EP} = \left(x_P - x_E\,, y_P - y_E\right) = \left(\frac{ab^2}{2sc} - \frac{ab(b+c)}{2sc}, \frac{ab(a+c)}{2sc} - \frac{ab(a+c)}{2sc}\right) = \left(\frac{-ab}{2s}, 0\right)$$

og

$$\overrightarrow{EQ} = \left(x_Q - x_E\,, y_Q - y_E\right) = \left(\frac{ab(b+c)}{2sc} - \frac{ab(b+c)}{2sc}, \frac{a^2b}{2sc} - \frac{ab(a+c)}{2sc}\right) = \left(0, \frac{-ab}{2s}\right) .$$

Da $\left|\overrightarrow{EP}\right| = \left|\overrightarrow{EQ}\right|$, ligger P og Q på en cirkel med centrum E og radius $\frac{ab}{2s}$.

Vi viser, at også I ligger på denne cirkel. Vi har, at

$$\overrightarrow{EI} = \left(x_I - x_E\,, y_I - y_E\right) = \left(\frac{ab}{2s} - \frac{ab(b+c)}{2sc}, \frac{ab}{2s} - \frac{ab(a+c)}{2sc}\right) = \frac{-ab}{2sc}\left(b, a\right) .$$

Vi får længden

$$\left|\overrightarrow{EI}\right| = \frac{ab}{2sc}\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{ab}{2s} ,$$

så I ligger på cirklen. $\left|\overrightarrow{EI}\right| = \dfrac{ab}{2s}$

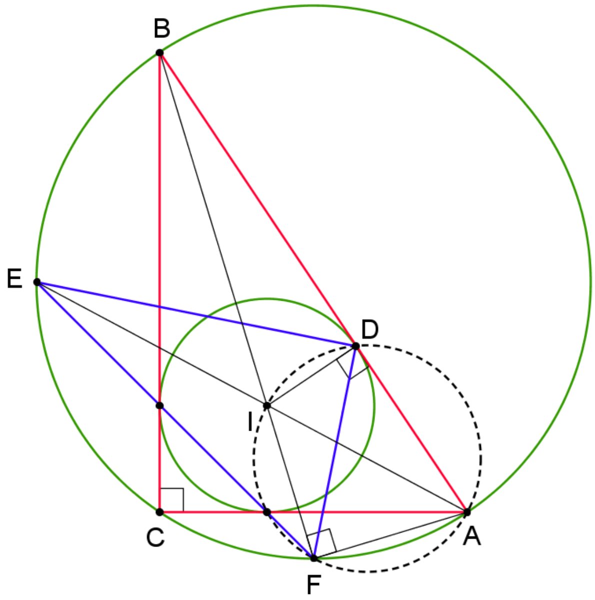
Vi ser desuden, at cirklen har samme radius som den indskrevne cirkel i ΔABC.
Af koordinaterne til $\overrightarrow{EP}$ og $\overrightarrow{EQ}$ fremgår, at $EP \perp EQ$, så ΔEPQ er ligebenet og ret- vinklet.

b.

1. metode.

Lad I være centrum for den indskrevne cirkel. Så ligger E på vinkelhalveringslinjen AI. På samme måde ligger F på BI. Lige store periferivinkler giver, at

$$\angle IFA = \angle BFA = \angle BCA = 90°.$$



Desuden er $\angle IDA = 90°$ og dermed er $\square FIDA$ er indskrivelig, da den er sammensat af to retvinklede trekanter. I den omskrevne cirkel gælder

$$\angle DFI = \angle DAI = \tfrac{1}{2}A.$$

Lige store periferivinkler i den omskrevne cirkel for ΔABC giver, at

$$\angle IFE = \angle BFE = \angle BAE = \tfrac{1}{2}A\ .$$

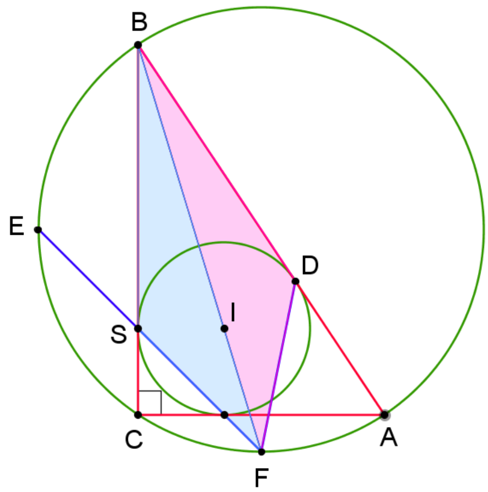
Dermed er

$$\angle DFE = \angle DFI + \angle IFE = \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}A = A\ .$$

Analogt er $\angle DEF = B$. Altså er ΔDEF og ΔABC ensvinklede.

Lad nu S være skæringspunkt mellem EF og BC. Oven for så vi, at

$$\angle DFI = \angle DFB = \angle BFE\ ,$$



så BF er vinkelhalveringslinje for $\angle DFE$ eller $\angle DFS$.
Desuden er BF vinkelhalveringslinje for $\angle ABC$ eller

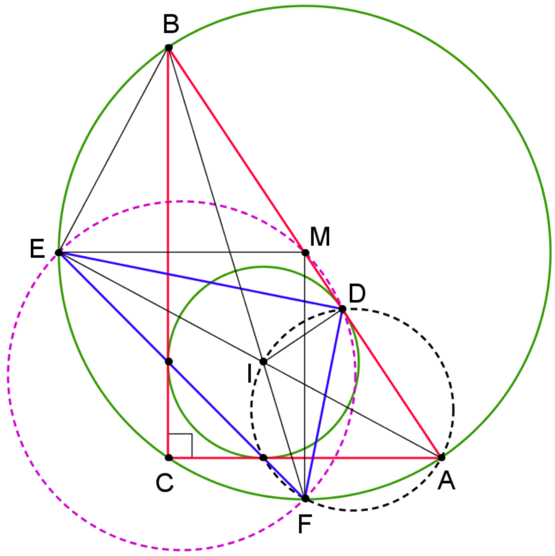
$\angle SBD$, så vi har, at $\angle DBF = \angle FBS$.

De to trekanter *BDF* og *BSF* har to vinkler og den mellemliggende side *BF* parvis lige store, så de er kongruente. Altså er *BD* = *BS*. Afstandene fra *B* til den indskrevne cirkels røringspunkter med *BC* og *BA* er altså lige lange, så *S* må være det andet røringspunkt. Altså går *EF* gennem røringspunktet for den indskrevne cirkel på kateten *BC*. På samme måde går *EF* gennem den indskrevne cirkels røringspunkt med *AC*.

2. metode.

Som før får vi, at □*FIDA* er indskrivelig. I Δ*BIA* er

$$\begin{aligned}\angle AIF &= 180° - \angle AIB \\ &= \angle IAB + \angle IBA \\ &= \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B = \tfrac{1}{2}(A+B) = 45°.\end{aligned}$$



Lige store periferivinkler i den om- skrevne cirkel for □*FIDA* giver, at

$$\angle ADF = \angle AIF = 45°.$$

Så er også $\angle FDI = 45°$. På samme måde fås ved at se på □*BEID*, at $\angle BDE = 45°$ og derfor $\angle EDI = 45°$. Altså er

$$\begin{aligned}\angle EDF &= \angle EDI + \angle FDI \\ &= 45° + 45° = 90°.\end{aligned}$$

Lad nu *M* være midtpunkt af hypotenusen *BA*. Da *F* er midtpunkt af buen *AC*, er $MF \parallel BC$. Desuden er $ME \parallel AC$, så $\angle EMF = 90°$.

Da nu

$$\angle EDF = \angle EMF,$$

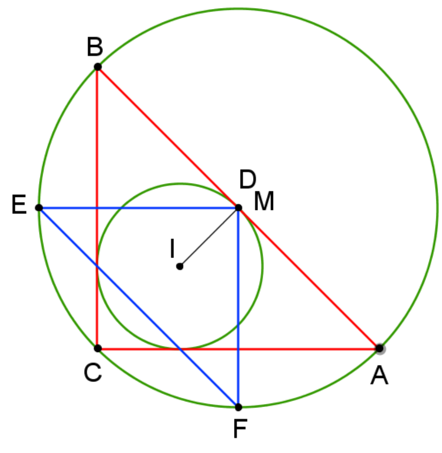
er □*EMDF* indskrivelig.

Vi deler herefter op i to tilfælde.

I. *D* falder ikke sammen med *M*.

Vi kan gå ud fra, at *D* ligger på linjestykket *MA*. Lige store periferivinkler i den omskrevne cirkel for □*EMDF* giver, at

$$\angle DEF = \angle DMF = \angle ABC = B.$$



Da $\angle EDF = 90°$, har Δ*DEF* og Δ*ABC* to vinkler parvis lige store, så de er ensvinklede.

II. *D* falder sammen med *M*.

Da $BC \parallel DF$, er

$$45° = \angle ADF = \angle AMF = \angle ABC = B,$$

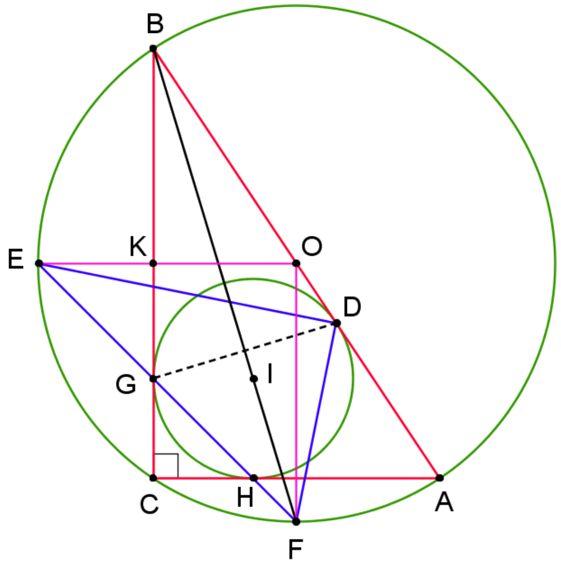
så Δ*ABC* er ligebenet og retvinklet. Nu er *M* centrum for den omskrevne cirkel, så *ME* = *MF*. Da $ME \perp MF$, er Δ*MEF* = Δ*DEF* retvinklet og ligebenet, så den er ensvinklet med Δ*ABC*.

3. metode.
Lad O være centrum for den omskrevne cirkel for ΔABC, dvs. O er midtpunkt af hypotenusen AB. Desuden er G og H skæringspunkter mellem EF og henholdsvis BC og AC. Så er

$$\angle OEG = \angle KEG = 45° = \angle KGE = \angle CGH .$$

Altså er ΔGCH retvinklet og ligebenet, og vi får

$$\begin{aligned} HC = GC = KC - KG &= \tfrac{1}{2}a - KE \\ &= \tfrac{1}{2}a - (OE - OK) \\ &= \tfrac{1}{2}a + OK - OB \\ &= \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}c . \end{aligned}$$



Nu er det velkendt, at radius r i den retvinklede trekants indskrevne cirkel netop er

$$r = \tfrac{1}{2}(a + b - c),$$

så G og H er den indskrevne cirkels røringspunkter med BC og AC.
Da F er midtpunkt af buen AC, er BF vinkelhalveringslinje for B, så centrum I for den indskrevne cirkel ligger på BF. Ved spejling i BF føres G over i D, så BF desuden er vinkelhalveringslinje for $\angle GFD$. I den omskrevne cirkel for ΔABC spænder $\angle EFB$ og $\angle EAB$ over buen EB, så de er lige store. Vi har, at

$$\angle EFD = 2\cdot\angle EFB = 2\cdot\angle EAB = A .$$

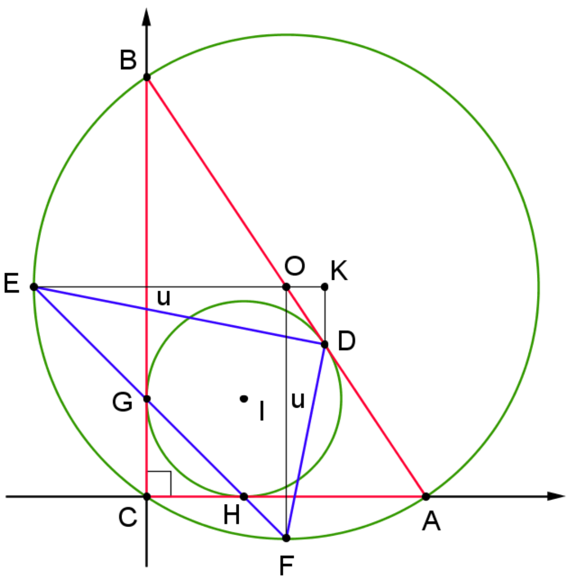
På samme måde er $\angle FED = B$. Dermed er ΔABC og ΔFED ensvinklede.

3. metode.
Koordinatsystemet har C som begyndelsespunkt, x-aksen er orienteret fra C mod A og y-aksen fra C mod B. Radius r i den indskrevne cirkel er

$$r = \tfrac{ab}{2s} ,$$

så vi får koordinaterne

$$(x_I , y_I) = \left(\frac{ab}{2s}, \frac{ab}{2s}\right).$$



Centrum O for den omskrevne cirkel er midtpunkt af hypotenusen, så vi får ko- ordinaterne

$$(x_O , y_O) = \left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right) .$$

Som i opgave **a** finder vi koordinaterne til røringspunktet D:

$$(x_D , y_D) = \left(\frac{ab(a+c)}{2sc}, \frac{ab(b+c)}{2sc}\right).$$

Da $OE = \tfrac{1}{2}c$ får vi x-koordinaten

$$x_E = \frac{b}{2} - \frac{c}{2} \ ,$$

så

$$\left(x_E\,,y_E\right) = \left(\frac{b-c}{2}, \frac{a}{2}\right) \ .$$

Røringspunkterne G og H har koordinaterne

$$\left(x_G\,,y_G\right) = \left(0, \frac{ab}{2s}\right) \quad \text{og} \quad \left(x_H\,,y_H\right) = \left(\frac{ab}{2s}, 0\right).$$

Endelig har F koordinaterne

$$\left(x_F\,,y_F\right) = \left(\frac{b}{2}, \frac{a-c}{2}\right).$$

Vi ser, at $GH \| EF$, fordi begge danner en vinkel på 45° med akserne.

Ligningen for linjen GH er

$$y = -x + \tfrac{ab}{2s} \ .$$

I denne ligning passer koordinaterne til F, som indsat giver

$$\frac{a-c}{2} = -\frac{b}{2} + \frac{ab}{2s} \ ,$$

hvilket efter lidt algebra er sandt. Dermed ligger E, F, G og H på linje.

Vi sætter $u = \angle OED$. Vi får

$$\angle DEF = \angle OEF - \angle OED = 45^\circ - u \ .$$

Forlængelsen af EO skærer den lodrette linje gennem D i K. Så er

$$\tan u = \frac{DK}{EK} = \frac{y_E - y_D}{x_D - x_E} = \frac{\frac{a}{2} - \frac{ab(b+c)}{2sc}}{\frac{ab(a+c)}{2sc} - \frac{b-c}{2}} \ .$$

Efter en delalgebra, hvor vi blandt andet benytter, at

$$c^3 - b^2c = c(c^2 - b^2) = a^2c$$

fås

$$\tan u = \frac{a(ac - bc + c^2 - 2b^2)}{a(ac + bc + c^2 + 2ab)} = \frac{c(a-b) + a^2 + b^2 - 2b^2}{ac + bc + a^2 + b^2 + 2ab}$$

$$= \frac{c(a-b) + (a+b)(a-b)}{c(a+b) + (a+b)^2} = \frac{(a-b)(a+b+c)}{(a+b)(a+b+c)} = \frac{a-b}{a+b} \ .$$

Videre er

$$\tan \angle DEF = \tan(45^\circ - u) = \frac{\tan 45^\circ - \tan u}{1 + \tan 45^\circ \cdot \tan u} = \frac{1 - \tan u}{1 + \tan u}$$

$$= \frac{1 - \frac{a-b}{a+b}}{1 + \frac{a-b}{a+b}} = \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a} = \tan B \ .$$

På samme måde vises, at

$$\tan \angle EFD = \tan A = \tan(45^\circ + u) \ ,$$

så ΔABC og ΔFED er ensvinklede.

Oven for fandt vi koordinaterne til E og F:

$$(x_E, y_E) = \left(\frac{b-c}{2}, \frac{a}{2}\right) \quad \text{og} \quad (x_F, y_F) = \left(\frac{b}{2}, \frac{a-c}{2}\right).$$

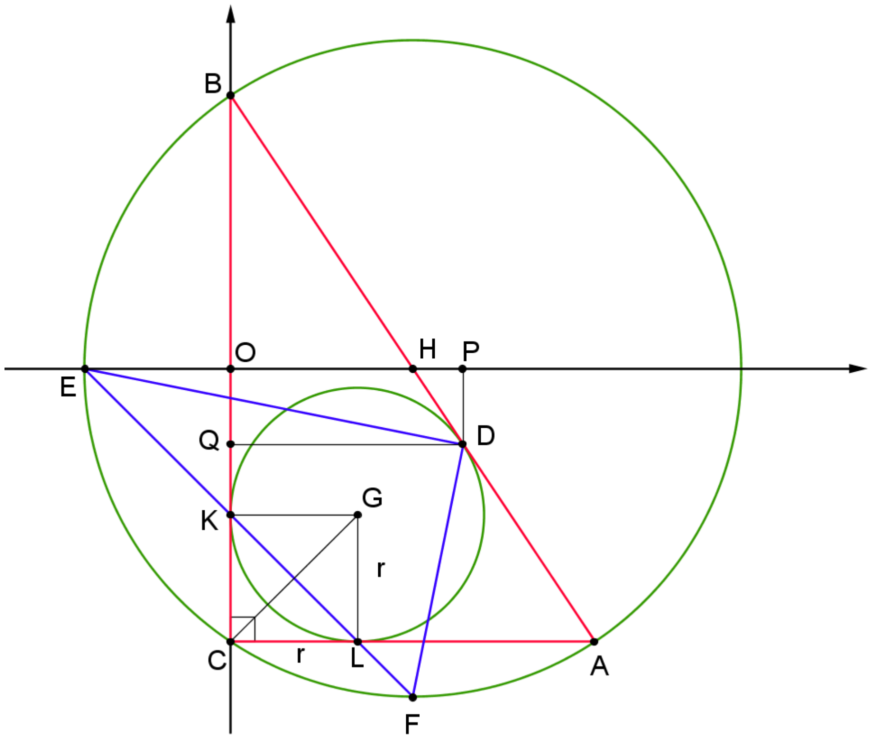
Altså er

$$EF^2 = \left(\frac{b-c}{2} - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - \frac{a-c}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{c^2}{2},$$

så $EF = \frac{c}{\sqrt{2}}$. Sideforholdet mellem ΔFED og ΔABC er altså $\frac{1}{\sqrt{2}}:1$ eller $1:\sqrt{2}$.

4. metode.

Lad den indskrevne cirkel med centrum G og radius r tangere BC og AC i K og L. Den omskrevne cirkel har centrum i midtpunktet H af hypotenusen AB. Afstanden fra vinkelspidsen C til den indskrevne cirkels røringspunkt L vides at være $r = s - c$ eller $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$.



Vi indlægger et koordinatsystem med begyndelsespunkt O som midtpunkt af BC og x-aksen gennem H orienteret fra O mod H. Desuden falder y-aksen sammen med BC. Vi betegner radius i den omskrevne cirkel med R, så $R = \frac{1}{2}c$ og $HF = R$. Dermed får vi koordinaterne

$$F\ \left(\frac{b}{2}, -R\right) = \left(\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right).$$

Da $OC = \frac{a}{2}$, får vi

$$L\ \left(r, -\frac{a}{2}\right) = \left(\frac{a+b-c}{2}, -\frac{a}{2}\right).$$

Da $KC = r$, er $OK = OC - KC = \frac{a}{2} - r$, så

$$K\ \left(0, r-\frac{a}{2}\right)\ .$$

Da $HE = R$ og $HO = \frac{b}{2}$, er $OE = HE - HO = R - \frac{b}{2}$, så

$$E\ \left(\frac{b}{2}-R, 0\right)=\left(\frac{b-c}{2}, 0\right)\ .$$

Lad P være projektionen af D på x-aksen. Da $BD = s - c$ og $\angle DHP = A$, er OK projektionen af BD på x-aksen, så

$$OP = (s-b)\cdot\cos A = (s-b)\cdot\frac{b}{c}\ .$$

Lad Q være projektionen af D på y-aksen. Da $BD = s - b$ er

$$BQ = BD\cdot\cos B = (s-b)\cdot\sin A$$

og dermed

$$OQ = BQ - BO = (s-b)\cdot\sin A - \tfrac{a}{2}\ .$$

Koordinaterne til D er altså

$$D\ \left((s-b)\cdot\frac{b}{c}, \frac{a}{2}-(s-b)\cdot\frac{a}{c}\right)=\frac{1}{2c}\big(b(a-b+c), a(b-a)\big)\ .$$

Vi får derefter vektorerne

$$\overrightarrow{DE}=\left(\frac{b-c}{2}-\frac{1}{2c}\cdot b(a-b+c)\ ,\ -\frac{a(b-a)}{2c}\right)=\frac{a}{2c}\big(-a-b, a-b\big)\ ,$$

$$\overrightarrow{DF}=\left(\frac{b}{2}-\frac{1}{2c}\cdot b(a-b+c), -\frac{c}{2}-\frac{1}{2c}\cdot a(b-a)\right)=\frac{b}{2c}\big(b-a, -b-a\big)\ .$$

Dette giver skalarproduktet

$$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}=\frac{ab}{4c^2}\big((b-a)(-a-b)+(a-b)(-b-a)\big)=\frac{ab(-a-b)}{4c^2}(b-a+a-b)=0\ .$$

Altså er $DE \perp DF$. Desuden er

$$\overrightarrow{EF}=\left(\frac{b}{2}-\frac{b-c}{2}, -\frac{c}{2}\right)=\left(\frac{c}{2}, -\frac{c}{2}\right)\ ,$$

hvoraf

$$\left|\overrightarrow{EF}\right|^2=\frac{1}{2}c^2 \quad \text{og} \quad \frac{EF}{AB}=\frac{c\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{c}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

og

$$\left|\overrightarrow{DE}\right|^2=\frac{a^2}{4c^2}\left(a^2+b^2+2ab+a^2+b^2-2ab\right)=\frac{a^2}{4c^2}\left(2a^2+2b^2\right)=\frac{2a^2}{4c^2}\cdot c^2=\frac{a^2}{2}\ ,$$

så

$$\frac{DE}{BC}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}a}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ .$$

Heraf følger, at ΔFED er ensvinklet med ΔABC i størrelsesforholdet $1 : \sqrt{2}$. Videre er

$$\overrightarrow{EF}=\left(\frac{c}{2}, -\frac{c}{2}\right)=R\cdot(1,-1)\ ,$$

og vi får

$$\overrightarrow{EK}=\left(\frac{c-b}{2},r-\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(c-b,b-c\right)=\frac{c-b}{2}(1,-1)\ ,$$

$$\overrightarrow{EL}=\left(\frac{a+b-c}{2}+\frac{c-b}{2},-\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right)=\frac{a}{2}(1,-1).$$

Dermed ligger *K* og *L* på linjen *EF*.

Besvarelser modtaget fra:

- Jens-Søren Andersen
- Klaus Grünbaum
- Walther Janous
- Hans Mortensen
- Jan Erik Pedersen.

Bemærkning til Opgave 366b. Opgave 366b har følgende ordlyd:

Bestem samtlige muligheder for at dele mængden {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} i to disjunkte delmængder *B* og *C*, så summen af tallene i *B* er lig med produktet af tallene i *C*.

Vi ser på følgende beslægtede problem:

Bestem en opdeling af mængden $\{1,2,3,\dots,n\}$ i to disjunkte delmængder *B* og *C*, så summen af tallene i *B* er lig med produktet af tallene i *C*.

Vi kræver altså ikke samtlige løsninger for hver værdi af *n*, men blot en enkelt. Små værdier af *n* giver følgende muligheder:

$$\begin{array}{lll}
n=5: & B=\{3,5\}\ , & C=\{1,2,4\} \\
n=6: & B=\{3,4,5\}\ , & C=\{1,2,6\} \\
n=7: & B=\{2,4,5,7\}\ , & C=\{1,3,6\} \\
n=8: & B=\{2,4,5,6,7\}\ , & C=\{1,3,8\} \\
n=9: & B=\{2,3,5,6,7,9\}\ , & C=\{1,4,8\} \\
n=10: & B=\{2,3,5,6,7,8,9\}\ , & C=\{1,4,10\} \\
n=11: & B=\{2,3,4,6,7,8,9,11\}\ , & C=\{1,5,10\}\ .
\end{array}$$

Vi får den idé at definere

$$C=\{1\ ,\ \tfrac{1}{2}(n+n\ (\mathrm{mod}\ 2))-1\ ,\ n-n\ (\mathrm{mod}\ 2)\}\ \ ,$$

eller

$$C=\{1\ ,\ \tfrac{1}{2}n-\tfrac{1}{2}\ ,\ n-1\}\quad \text{for}\ \ n\ \text{ulige}$$

$$C=\{1\ ,\ \tfrac{1}{2}n-1\ ,\ n\}\qquad \text{for}\ \ n\ \text{lige}\ .$$

Mængden *B* er komplementærmængde til *C*. For at vise dette dele vi op efter pariteten af *n*.

I. *n* ulige

Vi benytter, at

$$1+2+3+\cdots+n=\tfrac{1}{2}n(n+1)\ ,$$

så produktet af tallene i C er

$$1 \cdot (\tfrac{1}{2}n - \tfrac{1}{2}) \cdot (n - 1) = \tfrac{1}{2}(n^2 - 2n + 1)$$

og summen af tallene i B er

$$\tfrac{1}{2}n(n + 1) - (1 + (\tfrac{1}{2}n - \tfrac{1}{2}) + n - 1) = \tfrac{1}{2}(n^2 - 2n + 1)\ .$$

II. *n* lige

Her er produktet af tallene i C

$$1 \cdot (\tfrac{1}{2}n - 1) \cdot n = \tfrac{1}{2}n^2 - n\ ,$$

og summen af tallene i B er

$$\tfrac{1}{2}n(n + 1) - (1 + \tfrac{1}{2}n - 1 + n) = \tfrac{1}{2}n^2 - n\ .$$

Dermed er problemet løst.