Svar på opgave 366 (Januar 2020)

Opgave:

a. Bestem samtlige sæt af mindst fire konsekutive hele tal, så summen af de tre største tal er lig med summen af de resterende tal.

b. Bestem samtlige muligheder for at dele mængden {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} i to disjunkte mængder *B* og *C*, så summen af tallene i *B* er lig med produktet af tallene i *C*.

Besvarelse:

a.

1. metode.

Lad tallene være

$$n - k\,,\ n - k + 1\,,\ \ldots\,,\ n - 1\,,\ n\,,\ n + 1\,,\ n + 2\ .$$

Summen af de tre største tal er $3n + 3$ og summen af resten er

$$n - k + n - k + 1 + \cdots + n - 1 = kn - (1 + 2 + 3 + \cdots + k) = kn - \frac{k(k+1)}{2}\ .$$

Vi kræver altså, at

$$kn - \frac{k(k+1)}{2} = 3n + 3$$

eller

$$n(k - 3) = 3 + \tfrac{1}{2}k(k+1)\ .$$

Vi har, at $k \geq 3$ og vi får

$$n = \frac{3 + \frac{1}{2}k(k+1)}{k-3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{k^2+k+6}{k-3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(k-3)(k+4)+18}{k-3} = \frac{1}{2}\left(k+4+\frac{18}{k-3}\right).$$

Tallet i parentesen er et lige helt tal. Desuden skal $k - 3$ gå op i 18 eller i -18. Derfor får vi følgende tabel over mulige værdier for *k*:

$k - 3$	-2	-1	1	2	3	6	9	18
k	1	2	4	5	6	9	12	21
n	-2	-6	13	9	8	8	9	13

Altså har vi de otte løsninger

$-3 = -2 + (-1) + 0$, $-3 + (-2) + (-1) + \cdots + 6 + 7 + 8 = 9 + 10 + 11$

-8 + (-7) = -6 + (-5) + (-4) , -8 + (-7) + (-6) + ⋯ + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15
9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15 , 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 8 + 9 + 10
4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 9 + 10 + 11 , (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 8 + 9 + 10 .

2. metode.

Hvis talrækken består af 4 de konsekutive tal

$$a\ ,\ a+1\ ,\ a+2\ ,\ a+3\ ,$$

er

$$a = a+1+a+2+a+3 \quad \Leftrightarrow \quad a = 3a+6 \quad \Leftrightarrow \quad a = -3\ ,$$

så en løsning er

$$-3 = -2 + (-1) + 0\ .$$

Hvis talrækken består af 5 konsekutive tal, fås tilsvarende

$$a+a+1 = a+2+a+3+a+4 \quad \Leftrightarrow \quad 2a+1 = 3a+9 \quad \Leftrightarrow \quad a = -8\ ,$$

så en løsning er

$$-8 + (-7) = -6 + (-5) + (-4)\ .$$

Hvis talrækken består af 6 konsekutive tal, er

$$a+a+1+a+2 = a+3+a+4+a+5 \quad \Leftrightarrow \quad 3a+3 = 3a+12\ ,$$

som ikke har nogen løsninger.
Antag nu, at talrækken består af mindst 7 konsekutive tal. For $n \geq 6$ kan vi skrive

$$a+a+1+a+2+\cdots+(a+n-4)+(a+n-3) = a+n-2+(a+n-1)+(a+n)$$

$$\Leftrightarrow \quad (n-2)a+1+2+\cdots+(n-4)+(n-3) = 3a+n-2+n-1+n$$

$$\Leftrightarrow \quad (n-2)a+\tfrac{1}{2}(n-3)(n-2) = 3a+3n-3$$

$$\Leftrightarrow \quad 2a(n-2)+(n-3)(n-2) = 6a+6n-6$$

$$\Leftrightarrow \quad a(2n-4)-6a = 6n-6-(n-3)(n-2)$$

$$\Leftrightarrow \quad a(2n-10) = -n^2+11n-12$$

$$\Leftrightarrow \quad a = \frac{-n^2+11n-12}{2n-10} = -\frac{1}{2}n+3+\frac{9}{n-5}\ . \tag{1}$$

For $n \geq 6$ får vi hele værdier af a for visse værdier af n:

n	6	7	8	11	14	23
a	9	4	2	-1	-3	-8

Dette giver løsningerne

$(n,a) = (6,9)$: 9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15

$(n,a) = (7,4)$: 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 9 + 10 + 11

$(n,a) = (8,2)$: 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 8 + 9 + 10

$(n,a) = (11,-1)$: -1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 8 + 9 + 10

$(n,a) = (14,-3)$: -3 - 2 - 1 + 0 + ⋯ + 6 + 7 + 8 = 9 + 10 + 11

$$(n,a) = (23,-8)\ :\ -8 - 7 - 6 - \cdots + 9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15\ .$$

At disse er de eneste muligheder følger af, at vi efter (1) må kræve, at brøken $\frac{9}{n-5}$ må være af formen $\frac{1}{2}k$, hvor k er et helt tal, dvs. at $\frac{18}{n-5}$ er hel. Dette er kun muligt for værdierne n = 6, 7, 8, 11, 14 og 23.

3. metode.

Hvis en talrække med den ønskede egenskab er

$$a\ ,\ a+1\ ,\ a+2\ , \ldots ,\ a+n-6\ ,\ a+n-5\ ,\ a+n-4\ ,\ a+n-3\ ,$$
$$a+n-2\ ,\ a+n-1\ ,\ a+n$$

gælder, at

$$a + a + 1 + a + 2 + \ldots + (a+n-6) + (a+n-5) + (a+n-4) + (a+n-3)$$
$$= (a+n-2) + (a+n-1) + (a+n)\ .$$

Vi trækker de tre sidste led på venstre side over på højre side af lighedstegnet og får

$$a + a + 1 + a + 2 + \ldots + (a+n-6) = 3 + 3 + 3 = 9\ .$$

Her har vi en række konsekutive hele tal, hvis sum er 9. De eneste muligheder for dette er

$$9\quad ,\quad 4+5\quad ,\quad 2+3+4\ .$$

I. I den første mulighed med tallet 9 tilføjer vi tallene

$$-8, -7, -6, \ldots , 7, 8\ ,$$

hvor tallet 8 er 1 mindre end 9. Så får vi tallene i intervallet [-8,9]. Hertil skal føjes de 6 største tal, som vi ovenfor skaffede bort ved at flytte led over på den anden side af lig-hedstegnet. Vi får så rækken

$$-8\ , -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\ ,10\ , 11\ , 12\ , 13\ , 14, 15\ .$$

Dermed har vi to løsninger til opgavens spørgsmål:

$$-8 + (-7) + (-6) + \cdots\ 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$$

og

$$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15\ .$$

II. I den anden mulighed med tallene 4, 5 tilføjer vi tallene

$$-3\ , -2, -1, 0, 1, 2, 3\ ,$$

hvor tallet 3 er 1 mindre end 4. Så får vi tallene i intervallet [-3;5]. Hertil føjer vi de 6 største tal og får rækken

$$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\ .$$

Igen får vi to løsninger til opgaven:

$$-3 - 2 - 1 + 0 + \cdots + 6 + 7 + 8 = 9 + 10 + 11$$

og

$$4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 9 + 10 + 11\ .$$

III. I den tredje mulighed med tallene 2, 3, 4 tilføjer vi tallene

$$-1\ , 0\ , 1\ ,$$

hvor tallet 1 er 1 mindre end 2. Så får vi intervallet [-1,4]. Hertil føjer vi de 6 største tal og får rækken

$$-1,\ 0\ ,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4{,}5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\ .$$

Igen får vi to løsninger til opgaven:

$$-1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 8 + 9 + 10$$

og

$$2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 8 + 9 + 10\ .$$

b.

1. metode.

Summen af tallene i B er højst $1 + 2 + \cdots + 9 + 10 = 55$. Derfor indeholder C højst fire tal. Thi hvis C indeholdt mindst 5 tal, ville produktet af tallene i C være mindst $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$. Vi deler op i tilfælde.

I. C indeholder ét tal. Dette er umuligt, fordi produktet af tallene i C så er højst 9, mens summen af tallene i B er mindst $55 - 9 = 46$.

II. C indeholder to tal x og y. Antag, at $x < y$. Så er

$$xy = 55 - x - y \quad \text{eller} \quad (x + 1)(y + 1) = 56\ .$$

Idet $x + 1 < y + 1 < 11$, har vi kun muligheden $x + 1 = 7$ og $y + 1 = 8$, så $C = \{6,7\}$ og $B = \{1,2,3,4,5,8,9,10\}$

III. C indeholder tre tal, x, y og z. Vi antager, at $x < y < z$. Så er

$$xyz = 55 - x - y - z\ .$$

a. Hvis $x = 1$, får vi

$$yz = 54 - y - z \quad \Leftrightarrow \quad (y + 1)(z + 1) = 55\ ,$$

hvoraf $y + 1 = 5$, $z + 1 = 11$, så $y = 4$ og $z = 10$. Dermed er $C = \{1,4,10\}$ og $B = \{2,3,5,6,7,8,9\}$.

b. Hvis $x = 2$, får vi

$$2yz = 53 - y - z \quad \Leftrightarrow \quad (2y + 1)(2z + 1) = 107\ ,$$

hvilket er umuligt, da 107 er et primtal.

c. Hvis $x \geq 3$, er $xyz \geq 3\cdot 4\cdot 5 = 60$. Vi får, at

$$xyz = 55 - x - y - z \quad \Leftrightarrow \quad xyz + x + y + z = 55\ ,$$

hvilket er umuligt, da $xyz \geq 60$.

IV. C indeholder fire tal, x, y, z, t, hvor $x < y < z < t$. Hvis $x > 1$, er

$$xyzt \geq 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120 > 55\ ,$$

hvilket er umuligt.
Altså er $x = 1$, så vi får

$$xyzt = 55 - 1 - y - z - t \quad \Leftrightarrow \quad yzt = 54 - y - z - t \ ,$$

hvor $2 \le y < z < t$.
Hvis $y \ge 3$, er

$$yzt = 54 - y - z - t \quad \Leftrightarrow \quad yzt + y + z + t = 54 \ .$$

Dette er umuligt, da $yzt \ge 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.
Altså er $y = 2$, så

$$xyzt = 1 \cdot 2 \cdot z \cdot t = 55 - 1 - 2 - z - t$$

$$\Leftrightarrow \quad 2zt + z + t = 52 \quad \Leftrightarrow \quad (2z + 1)(2t + 1) = 105 \ .$$

Dette giver $2z + 1 = 7$ og $2t + 1 = 15$, så $z = 3$ og $t = 7$. Dermed er

$$C = \{1,2,3,7\} \quad \text{og} \quad B = \{4,5,6,8,9,10\} \ .$$

Samtlige løsninger er dermed

$$B = \{1,2,3,4,5,8,9,10\} \ , \ C = \{6,7\} \quad \text{med sum og produkt } 42$$

$$B = \{2,3,5,6,7,8,9\} \ , \ C = \{1,4,10\} \quad \text{med sum og produkt } 40$$

$$B = \{4,5,6,8,9,10\} \ , \quad C = \{1,2,3,7\} \quad \text{med sum og produkt } 42 \ .$$

2. metode.

Vi deler igen op i tilfælde efter antallet af tal i C.

I. C kan ikke bestå at et enkelt tal.

II. Antag, at $C = \{x,y\}$ og $x < y$. Så er

$$xy = 55 - x - y \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{55 - x}{1 + x}$$

En tabel over brøkens værdier viser, at hvis $x \le 4$, er $y > 10$. Vi prøver med $x = 5, 6, 7, 8$ og 9 og får muligheden $(x,y) = (6,7)$, så

$$C = \{6,7\} \ .$$

III. Antag, at $C = \{x,y,z\}$, hvor $x < y < z$. Så er $x + y + z > 3x$ og

$$x^3 < xyz = 55 - (x + y + z) < 55 - 3x \ ,$$

hvoraf

$$x^3 + 3x < 55 \ .$$

Dette giver mulighederne $x = 1$, $x = 2$ og $x = 3$.

Hvis $x = 1$ fås

$$yz = 54 - y - z \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{54 - y}{1 + y} \ .$$

Da $z \le 10$, må $y \ge 4$ og kun $y = 4$ giver et helt tal $z = 10$, så vi har

$$C = \{1,4,10\} \ .$$

Hvis $x = 2$ fås

$$2yz = 53 - y - z \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{53 - y}{1 + 2y} \ .$$

Ingen af de mulige værdier for y: $y = 3, 4, 5, 6, 7$ giver en hel værdi for z.

Hvis $x = 3$ fås

$$3yz = 52 - y - z \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{52-y}{1+3y} .$$

Heller ikke her findes hele løsninger.

IV. Antag, at $C = \{x,y,z,w\}$, hvor $x < y < z < w$. Så er

$$x^4 < xyzw = 55 - (x + y + z + w) < 55 - 4x \ ,$$

hvoraf

$$x^4 + 4x < 55 .$$

Dette giver mulighederne $x = 1$ eller $x = 2$.

IV a. Hvis $x = 1$ er $1 < y < z < w$, og vi har

$$yzw = 54 - y - z - w$$

og

$$y^3 < yzw = 54 - (y + z + w) < 54 - 3y ,$$

så

$$y^3 + 3y < 54 .$$

Mulighederne er her $y = 1, 2, 3$, hvor $y = 1$ bortfalder, fordi $x < y$.
Hvis $y = 2$, er

$$2zw = 52 - z - w \quad \Leftrightarrow \quad w = \frac{52-z}{1+2z} ,$$

Vi får her de hele løsninger $z = 3$ og $w = 7$ som de eneste brugbare. Dermed har vi fundet

$$C = \{1,2,3,7\} .$$

Hvis $y = 3$, er

$$3zw = 51 - z - w \quad \Leftrightarrow \quad w = \frac{51-z}{1+3z} ,$$

med løsningerne $z = 2$, $w = 7$, som forkastes, da $y < z$.

IV b. Hvis $x = 2$ er

$$2yzw = 53 - y - z - w ,$$

og vi får

$$2y^3 < 2yzw = 53 - (y + z + w) < 53 - 3y$$

hvoraf

$$2y^3 + 3y < 53 ,$$

som giver mulighederne $y = 1$ eller $y = 2$. Ingen af disse er brugbare, da $x < y$.

Bemærkning. Hvis den givne mængde er $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, giver argumenter, der ligner ovenstående, at den eneste mulige opdeling er $B = \{2,3,5,6,7,9\}$ og $C = \{1,4,8\}$ med sum og produkt 32.

Mængden $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ giver også kun en opdeling, nemlig $B = \{2,4,5,6,7\}$ og $C = \{1,3,8\}$ med sum og produkt 24.

Besvarelser modtaget fra:

- Jens-Søren Andersen
- Johs. Christensen
- Klaus Grünbaum
- Walther Janous

- Hans Mortensen
- Jens Skak-Nielsen
- Asger Olesen
- Jørgen Olesen
- Palle Bak Petersen
- Con Amore Problemgruppe