Svar på opgave 364 (November 2019)

Opgave:

a. Hvor mange forskellige *hele* tal findes blandt tallene

$$\text{int}\frac{1^2}{2020}\ ,\ \text{int}\frac{2^2}{2020}\ ,\ \text{int}\frac{3^2}{2020}\ , \cdots ,\ \text{int}\frac{2020^2}{2020}\ ?$$

b. Hvor mange forskellige *reelle* tal findes blandt tallene

$$\frac{1^2-1+4}{1^2+1}\ ,\ \frac{2^2-2+4}{2^2+1}\ ,\ \frac{3^2-3+4}{3^2+1}\ , \ldots ,\ \frac{100^2-100+4}{100^2+1}\ ?$$

Besvarelse:

a. Idet $44^2 = 1936$ og $45^2 = 2025$, er de første 44 tal alle 0. Desuden er

$$1\cdot 2020 < 2025 = 45^2 < 2116 = 46^2 < 63^2 = 3969 < 2\cdot 2020 < 64^2\ ,$$

så

$$\text{int}\frac{46^2}{2020} = \text{int}\frac{47^2}{2020} = \cdots = \text{int}\frac{63^2}{2020} = 1$$

Der er derfor masser af gentagelser i den første halvdel af mængden:

$$\text{int}\frac{1^2}{2020}\ ,\ \text{int}\frac{2^2}{2020}\ ,\ \text{int}\frac{3^2}{2020}\ , \cdots ,\ \text{int}\frac{1010^2}{2020}\ .$$

Imidlertid er der overraskende nok ingen gentagelser i den anden halvdel. Vi skal først se, at der i den første halvdel optræder alle de mulige tal fra 0 til $\text{int}\frac{1010^2}{2020} = 505$.

Vi går indirekte frem og antager, at et tal $n < 505$ mangler i første halvdel af mæng- den. Talrækken er voksende, så der må findes et sidste tal $k < 1010$, for hvilket $\text{int}\frac{k^2}{2020} < n$ hvorefter $\text{int}\frac{(k+1)^2}{2020} \geq n + 1$. For denne værdi af k er

$$\frac{k^2}{2020} < n \quad \text{og} \quad \frac{(k+1)^2}{2020} \geq n+1\ .$$

Heraf fås

$$k^2 < 2020\,n \quad \text{og} \quad (k+1)^2 \geq 2020n + 2020,$$

så vi har

$$k^2 + 2k + 1 \geq 2020n + 2020$$

Altså er

$$k^2 + 2k + 1 > k^2 + 2020 \quad \Leftrightarrow \quad k > 1009\tfrac{1}{2}$$

i strid med, at $k < 1010$.

Nu ser på anden halvdel af mængden:

$$\text{int}\frac{1011^2}{2020}\ ,\ \text{int}\frac{1012^2}{2020}\ ,\ \cdots\ ,\ \text{int}\frac{2020^2}{2020}\ .$$

Som nævnt påstår vi, at ikke optræder gentagelser i denne talrække. Igen bruger vi in- direkte bevis og antager, at et helt tal m optræder to gange i talrækkens sidste halvdel.

Da talrækken er voksende, vil enhver gentagelsesværdi optræde i to konsekutive led, så vi for en værdi af $k > 1010$ ville få

$$m = \text{int}\frac{k^2}{2020} = \text{int}\frac{(k+1)^2}{2020}\ .$$

Dette medfører åbenbart, at

$$\frac{(k+1)^2}{2020} - \frac{k^2}{2020} < 1$$

hvoraf

$$(k+1)^2 - k^2 < 2020 \quad \Leftrightarrow \quad 2k + 1 < 2020 \quad \Leftrightarrow \quad k < 1009\tfrac{1}{2}$$

i strid med, at $k > 1010$.

Dermed frembringer første halvdel af talmængden 506 forskellige hele tal og anden halvdel frembringer 1010 forskellige hele tal. Vi må dog kontrollere, at det sidste led i første halvdel ikke er magen til det første led i sidste halvdel. Vi finder at

$$\text{int}\frac{1010^2}{2020} = 505 \quad \text{og} \quad \text{int}\frac{1011^2}{2020} = 506.$$

I alt indeholder talmængden 506 + 1010 = 1516 forskellige hele tal.

b.

1. metode.

Det almene led i talrækken har formen

$$a_n = \frac{n^2 - n + 4}{n^2 + 1} = 1 - \frac{n-3}{n^2+1}\ .$$

Betingelsen for, at to led er ens, er at der findes naturlige tal n og k, så

$$1 - \frac{n-3}{n^2+1} = 1 - \frac{k-3}{k^2+1}\ ,$$

hvilket giver

$$\frac{n-3}{n^2+1} = \frac{k-3}{k^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad nk^2 + n - 3k^2 - 3 = kn^2 + k - 3n^2 - 3$$

$$\Leftrightarrow \quad 3n^2 - 3k^2 + n - k = kn^2 - nk^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3(n+k)(n-k) + (n-k) = kn(n-k)$$

$$\Leftrightarrow \quad (n-k)(3n + 3k + 1) = kn(n-k)\ .$$

Da $n \neq k$, får vi

$$kn = 3n + 3k + 1 \quad \Leftrightarrow \quad n(k-3) = 3k + 1\ .$$

Her er $k \neq 3$, så

$$n = \frac{3k+1}{k-3} = 3 + \frac{10}{k-3} \ .$$

Da k - 3 altså går op i 10 har vi mulighederne:

$k - 3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad k = 4$ så $n = 3 + \frac{10}{1} = 13$
$k - 3 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad k = 5$ så $n = 3 + \frac{10}{2} = 8$
$k - 3 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad k = 8$ så $n = 3 + \frac{10}{5} = 5$
$k - 3 = 10 \quad \Leftrightarrow \quad k = 13$ så $n = 3 + \frac{10}{10} = 4$.

De eneste to led, der er ens, er enten

$$a_4 = \frac{16-4+4}{16+1} = \frac{16}{17} \quad \text{og} \quad a_{13} = \frac{169-13+4}{169+1} = \frac{160}{170} = \frac{16}{17}$$

eller

$$a_5 = \frac{25-5+4}{25+1} = \frac{24}{26} = \frac{12}{13} \quad \text{og} \quad a_8 = \frac{64-8+4}{64+1} = \frac{60}{65} = \frac{12}{13} \ . \ .$$

Talrækken indeholder derfor 98 forskellige led.

2. metode.

Antag, at $m < n$. Vi får så

$$\frac{n^2-n+4}{n^2+1} = \frac{m^2-m+4}{m^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad (n^2-n+4)(m^2+1) = (m^2-m+4)(n^2+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad n^2m^2 - nm^2 + 4m^2 + n^2 - n + 4 = m^2n^2 - mn^2 + 4n^2 + m^2 - m + 4$$

$$\Leftrightarrow \quad n^2m - nm^2 = 3n^2 - 3m^2 + n - m \quad \Leftrightarrow \quad nm(n - m) = 3(n + m)(n - m) + (n - m)$$

$$\Leftrightarrow \quad nm = 3n + 3m + 1 \quad \Leftrightarrow \quad (n - 3)(m - 3) = 10 = 10 \cdot 1 = 5 \cdot 2 \ .$$

Vi får de mulige løsninger $(m,n) = (4,13)$, som giver brøkerne værdien $\frac{16}{17}$ og $(m,n) = (5,8)$, som giver brøken værdien $\frac{12}{13}$. Talrækken indeholder altså 98 forskellige led.

3. metode

For $x \geq 0$ sætter vi

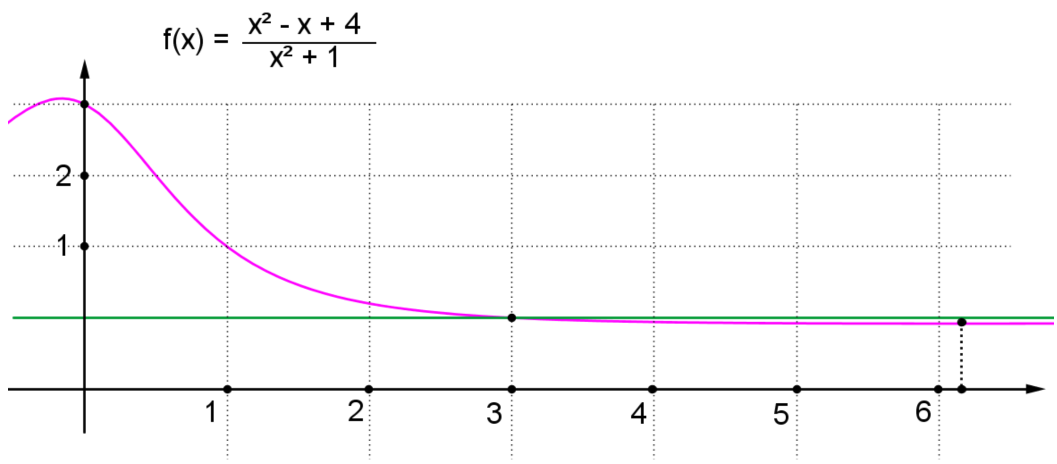
$$f(x) = \frac{x^2-x+4}{x^2+1} \ .$$

Vi finder den afledede

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x^2+1) - 2x(x^2-x+4)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2-6x-1}{(x^2+1)^2} \ .$$

Nulpunkter for den afledede er

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3 \pm \sqrt{10} \ .$$



Da $x \geq 0$, er $f(x)$ aftagende i $\left[0;3+\sqrt{10}\right]$ og voksende i $\left[3+\sqrt{10};\infty\right[$. Desuden gælder, at $f(x) \to$ 1- for $x \to \infty$. Vi finder, at

$$f(3)=1 \quad , \quad f(4)=\tfrac{16}{17} \ , \ f(5)=\tfrac{12}{13} \ , \ f(6)=\tfrac{34}{37} \ .$$

Vi undersøger, om $\tfrac{16}{17}$ er funktionsværdi i det interval, hvor $f(x)$ er voksende. Vi finder, at

$$\frac{x^2-x+4}{x^2+1}=\frac{16}{17} \quad \Leftrightarrow \quad 16(x^2+1)=17(x^2-x+4)$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 17x + 52 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x=4 \ \vee \ x=13 \ .$$

Dermed er $f(4) = f(13)$. På samme måde fås for tallet $\tfrac{12}{13}$, at

$$\frac{x^2-x+4}{x^2+1}=\frac{12}{13} \quad \Leftrightarrow \quad 12(x^2+1)=13(x^2-x+4) \quad \Leftrightarrow \quad x=5 \ \vee \ x=8 \ .$$

Altså er $f(5) = f(8)$. For tallet $\tfrac{34}{37}$ fås, at $\dfrac{x^2-x+4}{x^2+1}=\dfrac{34}{37} \quad \Leftrightarrow \quad x=6 \vee \ x=\dfrac{19}{3}$.

Da $\tfrac{19}{3}$ ikke er hel, er der kun to gentagelser blandt de 100 tal, så der findes 98 forskellige hele tal i talmængden.

Besvarelser modtaget fra:

- Jens-Søren Andersen
- Hans Christian Hulvej
- Walther Janous
- Thyge Knudsen
- Hans Mortensen
- Asger Olesen
- Jørgen Olesen
- Jan Erik Pedersen
- Jens Skak- Nielsen
- Con Amore Problemgruppe.