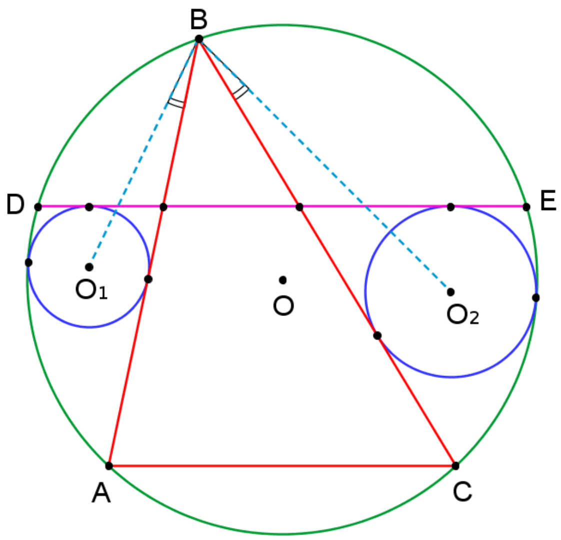
Svar på sommeropgave (2019)

Opgave:

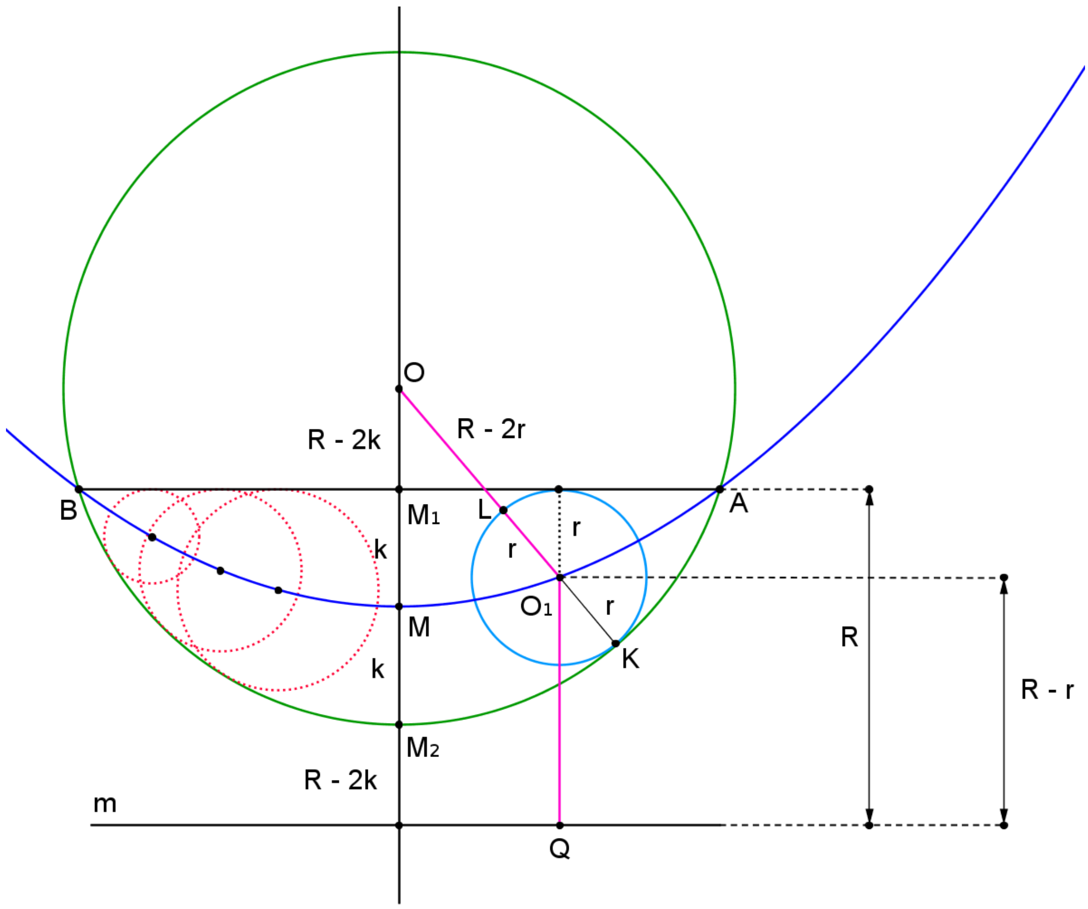
I ΔABC er O centrum for den omskrevne cirkel og DE er en korde parallel med AC.
En cirkel med centrum O_1 tangerer DE, AB og den omskrevne cirkel, og en cirkel med centrum O_2 tangerer DE, BC og den omskrevne cirkel.
Vis, at $\angle ABO_1 = \angle CBO_2$.



Besvarelse:

Vi går frem i en række skridt.

I. En cirkel har centrum i O og radius R. Vi ser i ΔABC på korden AB i cirklen. Desuden er O_1 et indre punkt i cirklen, så O_1 er centrum for en cirkel med radius r, der tangerer AB og den givne cirkel. Linjen m er parallel med AB i afstanden R, og O_1 ligger mellem AB og m. Hvis projektionen af O_1 på m er Q, er $O_1Q = R - r$. Linjen OO_1 skærer den givne cirkel i K, som er de to cirklers røringspunkt.



Vi ser, at

$$OO_1 = OK - O_1K = R - r \;.$$

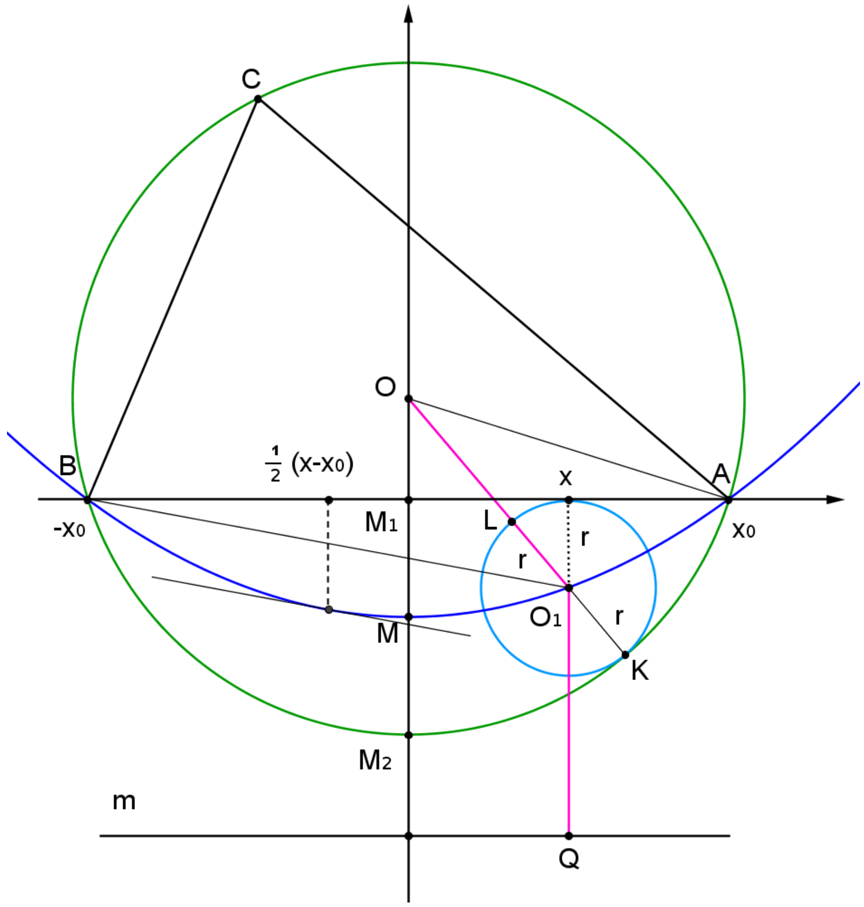
Punktet O_1 har dermed samme afstand til linjen m og punktet O, så O_1 ligger på en parabel med brændpunkt i O og med m som ledelinje.

Lad M_1 være midtpunktet af AB og M_2 midtpunktet af buen AB mellem AB og m. Midtpunktet af M_1M_2 er M. Punktet M ligger på parablen, da M har samme afstand til O og m.

På den anden side er det klart, at ethvert punkt på parabelbuen mellem A og B er centrum for en cirkel, der tangerer både AB og den givne cirkel.

II. Vi indlægger et koordinatsystem med begyndelsespunkt i M_1. Punkterne A og B lig- ger på x-aksen og M på y-aksen. Orienteringen er således, at B har negativ x-koordinat og M har negativ y-koordinat. Vi sætter

$$B\,(-x_0,0) \;\;,\;\; A\,(x_0,0) \;\;,\;\; O\,(0,d)\;.$$



Vi har, at

$$d = OM_1 = OM_2 - M_1M_2 = R - 2 \cdot MM_1 ,$$

så at

$$MM_1 = \tfrac{1}{2}(R-d) \ .$$

Altså har M koordinaterne

$$M \ \left(0, \tfrac{1}{2}(d-R)\right) \ .$$

Parablens ligning er af formen $y = ax^2 + b$. Da toppunktet falder i M, er

$$b = \tfrac{1}{2}(d-R) \ .$$

Desuden er

$$0 = a{x_0}^2 + b \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{-b}{{x_0}^2} = \frac{\frac{1}{2}(R-d)}{{x_0}^2} = \frac{R-d}{2{x_0}^2} \ .$$

Lad nu C være et punkt på cirkelbuen AB over x-aksen. I ΔABC giver sinusrelationen, at

$$\sin C = \frac{AB}{2R} = \frac{2x_0}{2R} = \frac{x_0}{R} \ ,$$

hvoraf

$$x_0 = R \cdot \sin C \quad \text{eller} \quad R = \frac{x_0}{\sin C} \ .$$

I ΔOM_1A er $M_1A = x_0$, $OM_1 = d$ og $OA = R$, så

$$d^2 + {x_0}^2 = R^2 \quad \Leftrightarrow \quad d^2 + R^2 \sin^2 C = R^2$$

$$\Leftrightarrow \quad d^2 = R^2(1 - \sin^2 C) \quad \Leftrightarrow \quad d = R \cdot \cos C \ .$$

Så er

$$b = \tfrac{1}{2}(d - R) = \tfrac{1}{2}(R\cos C - R) = -R \cdot \frac{1-\cos C}{2}$$

og

$$a = \frac{R-d}{2x_0} \cdot \frac{1}{x_0} = \frac{1-\cos C}{2\sin C} \cdot \frac{1}{x_0} = \tfrac{1}{2}\tan\tfrac{C}{2} \cdot \tfrac{1}{x_0}\ .$$

III. Vi trækker linjen BO_1, som er en parabelkorde. Nu er det kendt, at hældningen for en parabelkorde er lig med hældningen for den parabeltangent, hvis røringspunkt har en x-koordinat, der er middeltallet af x-koordinaterne til kordens endepunkter.
Vi sætter O_1 (x,y). Parablens tangent i et punkt er den afledede

$$y' = 2ax = \tan\tfrac{C}{2} \cdot \tfrac{x}{x_0}\ ,$$

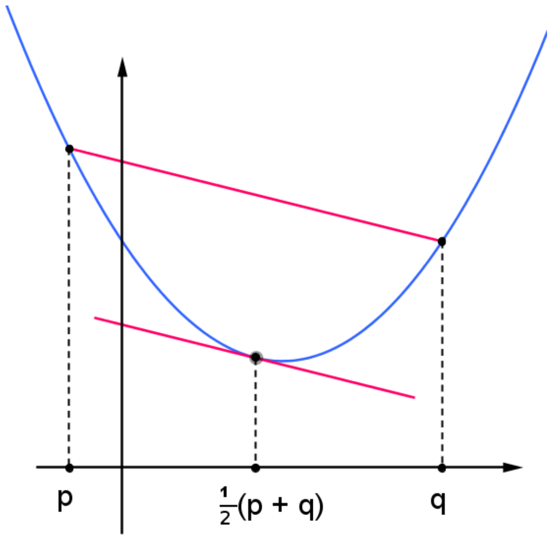
og hældningen for tangenten i punktet, hvis x-koordinat er middeltallet mellem x-koordinaterne til B og O_1 er dermed

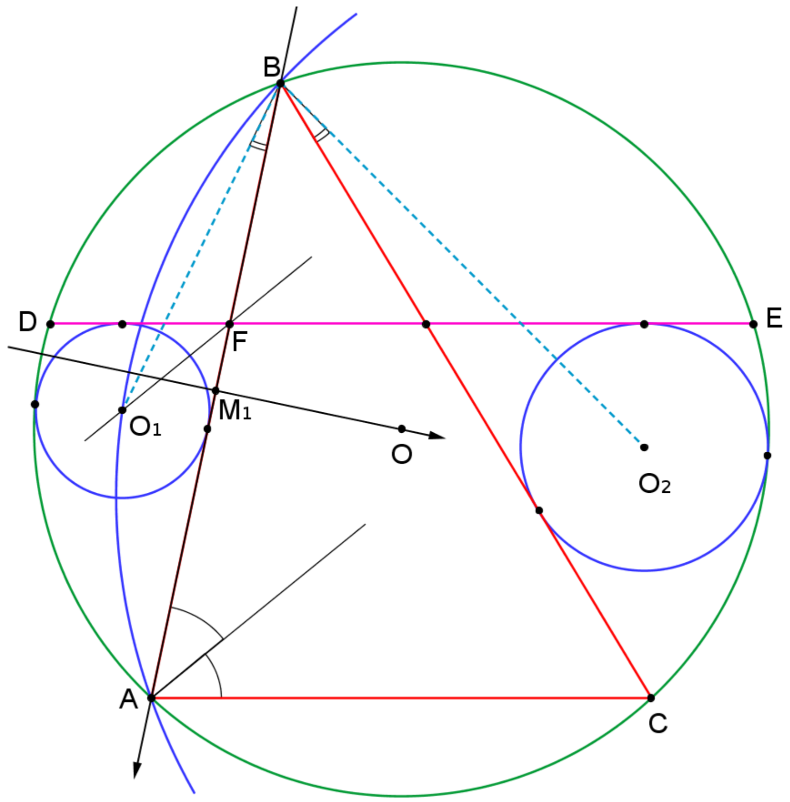
$$\tan\tfrac{C}{2} \cdot \tfrac{1}{x_0} \cdot \tfrac{x-x_0}{2}\ ,$$

idet x-koordinaterne til B og O_1 er $-x_0$ og x. Denne hældning er lig med hældningen for BO_1, som er $\tan\angle ABO_1$, så vi får

$$\tan\angle ABO_1 = \tan\tfrac{C}{2} \cdot \tfrac{x-x_0}{2x_0}\ .$$

Da x_0 er negativ, er $\tan\angle ABO_1$ negativ, fordi vi her regner med orienterede vinkler.





IV. Nu ligger O_1 på den vinkelhalveringslinje til en af vinklerne mellem *DE* og *AB*, der er parallel med vinkelhalveringslinjen til *A* i ΔABC. Vi betegner skæringspunktet mel- lem vinkelhalveringslinjen gennem O_1 og *x*-aksen (dvs. *AB*) med *F* og betegner koordi- naterne til *F* med (x_1,0). Da hældningen er negativ, er den -tan $\frac{A}{2}$ og ligningen er

$$y = -\tan\tfrac{A}{2}\,(x - x_1)\ .$$

Skæringspunktet mellem denne linje og parabelbuen har en *x*-koordinat, der findes ved at løse ligningen

$$-\tan\tfrac{A}{2}\,(x - x_1) = ax^2 + b \quad \Leftrightarrow \quad ax^2 + \tan\tfrac{A}{2}\cdot x + b - x_1\cdot\tan\tfrac{A}{2} = 0\ .$$

Vi benytter (se oven for)

$$a = \tfrac{1}{2}\tan\tfrac{C}{2}\cdot\tfrac{1}{x_0}\quad ,\quad b = -R\cdot\frac{1-\cos C}{2}\quad ,\quad x_0 = R\cdot\sin C\ .$$

Vi får, at

$$x = \frac{-\tan\frac{A}{2} \pm \sqrt{\tan^2\frac{A}{2} - 2\cdot\tan\frac{C}{2}\cdot\frac{1}{x_0}\cdot\left(-x_1\cdot\tan\frac{A}{2} - R\cdot\frac{1-\cos C}{2}\right)}}{\tan\frac{C}{2}\cdot\frac{1}{x_0}}\ .$$

Vi skal kun bruge den største af disse løsninger, så

$$x = \frac{-\tan\frac{A}{2} + \sqrt{\tan^2\frac{A}{2} - 2\cdot\tan\frac{C}{2}\cdot\frac{1}{x_0}\cdot\left(-x_1\cdot\tan\frac{A}{2} - R\cdot\frac{1-\cos C}{2}\right)}}{\tan\frac{C}{2}\cdot\frac{1}{x_0}}$$

$$= x_0 \cdot \frac{-\tan\tfrac{A}{2} + \sqrt{\tan^2\tfrac{A}{2} + 2\cdot\tan\tfrac{C}{2}\cdot\left(\tan\tfrac{A}{2}\cdot\tfrac{x_1}{x_0} + \tfrac{1-\cos C}{2\sin C}\right)}}{\tan\tfrac{C}{2}}$$

$$= x_0 \cdot \frac{-\tan\tfrac{A}{2} + \sqrt{\tan^2\tfrac{A}{2} + 2\cdot\tan\tfrac{C}{2}\cdot\tan\tfrac{A}{2}\cdot\tfrac{x_1}{x_0} + 2\cdot\tan\tfrac{C}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\tan\tfrac{C}{2}}}{\tan\tfrac{C}{2}}$$

$$= x_0 \cdot \frac{-\tan\tfrac{A}{2} + \sqrt{\tan^2\tfrac{A}{2} + 2\cdot\tan\tfrac{C}{2}\cdot\tan\tfrac{A}{2}\cdot\tfrac{x_1}{x_0} + \tan^2\tfrac{C}{2}}}{\tan\tfrac{C}{2}} \quad .$$

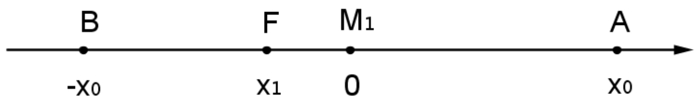
Herefter fås:

$$\tan\angle ABO_1 = \tfrac{1}{2}\tan\tfrac{C}{2}\cdot\frac{x-x_0}{2x_0}\cdot\left(\frac{-\tan\tfrac{A}{2} + \sqrt{\tan^2\tfrac{A}{2} + 2\cdot\tan\tfrac{C}{2}\cdot\tan\tfrac{A}{2}\cdot\tfrac{x_1}{x_0} + \tan^2\tfrac{C}{2}}}{\tan\tfrac{C}{2}} - 1\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(-\tan\tfrac{A}{2} - \tan\tfrac{C}{2} + \sqrt{\tan^2\tfrac{A}{2} + \tan^2\tfrac{C}{2} + 2\tan\tfrac{A}{2}\tan\tfrac{C}{2}\cdot\tfrac{x_1}{x_0}}\right)$$

Nu er

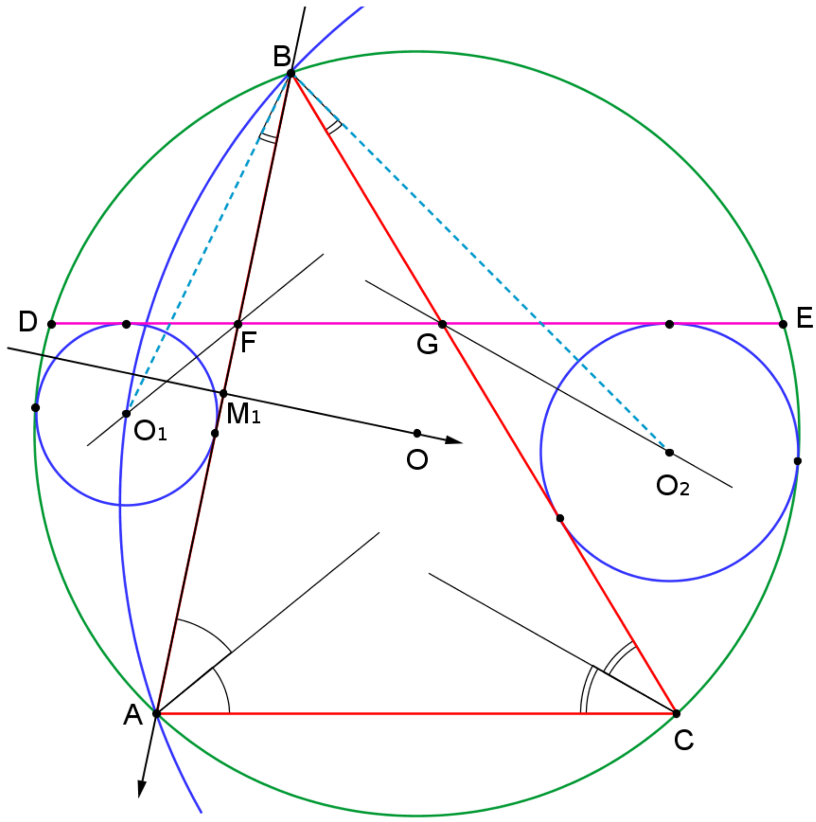
$$\frac{x_1}{x_0} = 2\cdot\frac{x_1+x_0}{2x_0} - 1 = 2\cdot\frac{BF}{BA} - 1 \ .$$



Dette fremgår som vist på figuren af de koordinatbetegnelser, vi har valgt på x-aksen.

I formlen oven for er $\angle ABO_1$ regnet negativ. For som på sædvanlig vis at regne vinklen positiv, skifter vi fortegn for $\tan\angle ABO_1$, dvs.

$$\tan\angle ABO_1 = \tfrac{1}{2}\left(\tan\tfrac{A}{2} + \tan\tfrac{C}{2} - \sqrt{\tan^2\tfrac{A}{2} + \tan^2\tfrac{C}{2} + 2\tan\tfrac{A}{2}\tan\tfrac{C}{2}\cdot\left(2\frac{BF}{BA} - 1\right)}\right) \ . \qquad (1)$$



V. På figuren skærer korden DE parallel med AC siderne AB og BC i F og G. Punktet O_1 på parablen er centrum for en cirkel, der tangerer AB, DF og den omskrevne cirkel, idet O_1 ligger på parablen og på vinkelhalveringslinjen for $\angle DFA$.

På samme måde kan vi gennemføre ovenstående argumenter på højre side af figuren ved at ombytte A og C samt F og G, hvorved vi får

$$\tan\angle CBO_2 = \tfrac{1}{2}\left(\tan\tfrac{C}{2}+\tan\tfrac{A}{2}-\sqrt{\tan^2\tfrac{C}{2}+\tan^2\tfrac{A}{2}+2\tan\tfrac{C}{2}\tan\tfrac{A}{2}\cdot\left(2\frac{BG}{BC}-1\right)}\right). \quad (2)$$

Da ΔBAC og ΔBFG er ensvinklede, er

$$\frac{BF}{BA}=\frac{BG}{BC}\ ,$$

og af (1) og (2) følger, at $\angle ABO_1 = \angle CBO_2$.

Ovenstående besvarelse er modtaget fra **Jens-Søren Andersen**, Esbjerg. Den bygger som vist i vid udstrækning på analytisk geometri.

Walther Janous, Innsbruck, har sendt en besvarelse, der anvender computer-programmer i analytisk geometri til at beregne eksakte koordinater til figurens punkter. Dette giver et mareridt af (ukontrollérbar) algebra.

Jan Erik Pedersen, Aakirkeby, har sendt to trigonometriske beviser. Vi bringer det simpleste af dem her.

Centrene O_1 og O_2 fastlægges ved sidelængderne $p = BO_1$ og $q = BO_2$ og vinklerne

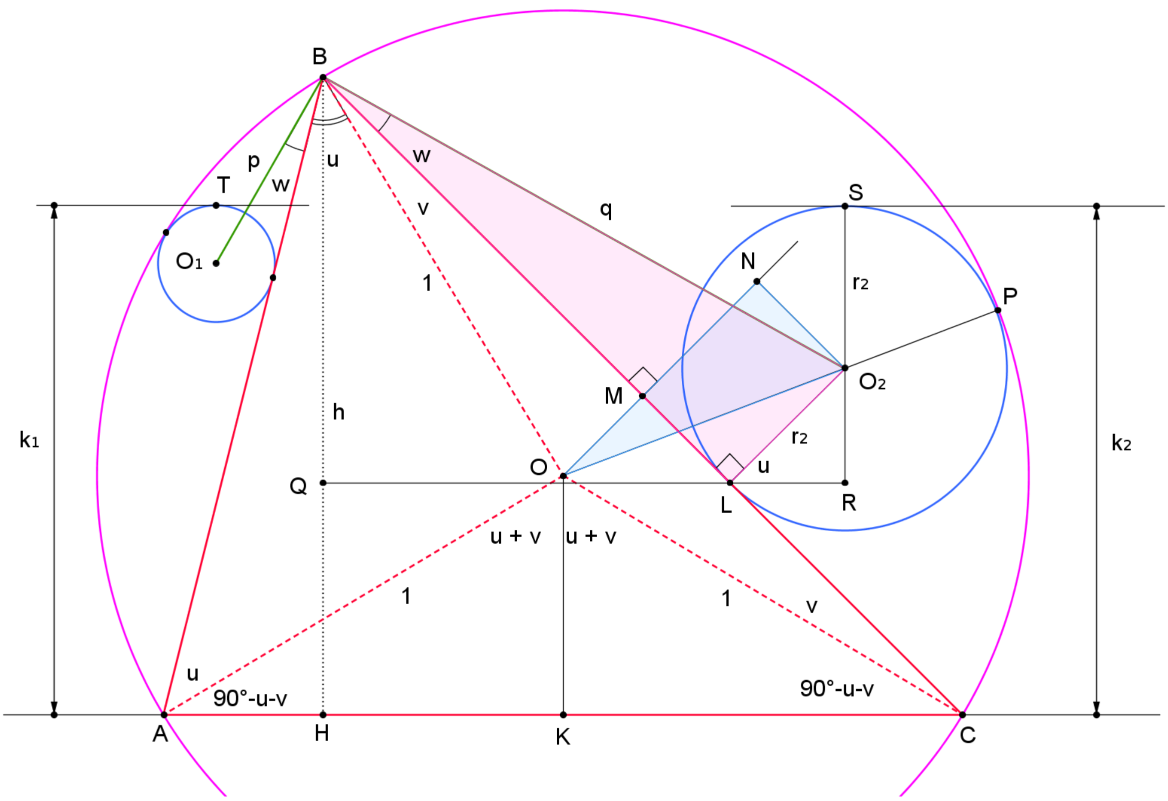
$$w = \angle ABO_1 = \angle CBO_2 \ .$$

Vi antager, at trekantens omskrevne cirkel har radius 1 og får, at

$$OO_1 + r_1 = 1 \quad \text{og} \quad OO_2 + r_2 = 1 \ .$$

Lad os se på forholdene for O_2; de tilsvarende for O_1 fås ved bogstavombytning.

Lad OO_2 skære trekantens omskrevne cirkel i P, som altså er fællespunktet for de to cirkler. Cirklen med centrum i O_2 tangerer BC i L, og M er midtpunkt af BC. En linje gennem L parallel med AC skærer højden BH i Q. Projektionen af O_2 på QL er R, og RO_2 skærer cirklen med centrum O_2 i S som vist. Endelig er K midtpunkt af AC.



Vi sætter

$$u = \angle ABO \ , \ v = \angle CBO \ .$$

Så er

$$u = \angle OAB \ , \ v = \angle BCO \ .$$

Da $\angle ABC = u + v$, er gradtallet for buen AC $2(u + v)$, så

$$\angle AOK = \angle COK = u + v \ , \ \angle OAK = \angle OCK = 90° - u - v \ .$$

I ΔBOM får vi, at

$$BM = OB \cdot \cos v = \cos v \quad , \quad OM = OB \cdot \sin v = \sin v \ .$$

Desuden er

$$BC = 2 \cdot BM = 2\cos v \ .$$

I ΔBO_2L fås

$$BL = q \cdot \cos w \quad , \quad O_2L = r_2 = q \cdot \sin w \ .$$

Desuden er

$$1 = OO_2 + O_2P \quad \Leftrightarrow \quad OO_2 = 1 - O_2P = 1 - q\cdot \sin w \ .$$

Projektionen af O_2 på OM er N. I ΔOO_2N er

$$OO_2 = 1 - q\cdot \sin w \quad , \quad ON = OM + MN = \sin v + O_2L = \sin v + q\cdot \sin w$$

samt

$$NO_2 = ML = BL - BM = q\cdot \cos w - \cos v \ .$$

I ΔOO_2N giver Pythagoras

$$ON^2 + NO_2^2 = OO_2^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (\sin v + q\cdot \sin w)^2 + (q\cdot \cos w - \cos v)^2 = (1 - q\cdot \sin w)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 v + q^2\sin^2 w + 2q\cdot \sin v\cdot \sin w + q^2\cos^2 w + \cos^2 v - 2q\cdot \cos v\cdot \cos w$$

$$= 1 + q^2\sin^2 w - 2q\cdot \sin w$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + q^2 + 2q(\sin v\cdot \sin w - \cos v\cdot \cos w) = 1 + q^2\sin^2 w - 2q\cdot \sin w$$

$$\Leftrightarrow \quad q^2(1 - \sin^2 w) + 2q(\sin v\cdot \sin w - \cos v\cdot \cos w + \sin w) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad q\cdot \cos^2 w + 2(\sin v\cdot \sin w - \cos v\cdot \cos w + \sin w) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad q = \frac{2(\sin v\cdot \sin w - \cos v\cdot \cos w + \sin w)}{\cos^2 w} = \frac{2(\sin w - \cos(v+w))}{\cos^2 w} \ .$$

For forholdene ved O_1 fås tilsvarende

$$p = \frac{2(\sin w - \cos(u+w))}{\cos^2 w} \ .$$

Nu udregner vi den vinkelrette afstand k_2 fra S til siden AC. Vi får, at

$$k_2 = HQ + RO_2 + O_2S = BH - BQ + RO_2 + r_2 \ . \qquad (1)$$

I ΔBCH er

$$BH = BC\cdot \sin C = 2\cos v\cdot \sin(90° - u) = 2\cos v\cdot \cos u \ .$$

I ΔBLQ er

$$BQ = BL\cdot \sin\angle BLQ = q\cdot \cos w\cdot \sin C = q\cdot \cos w\cdot \sin(90° - u) = q\cdot \cos w\cdot \cos u$$

$$= \cos w\cdot \cos u\cdot \frac{2(\sin w - \cos(v+w))}{\cos^2 w} = 2\cos u\cdot \frac{\sin w - \cos(v+w)}{\cos w} \ .$$

Videre er

$$\angle RLC = \angle LCK = 90° - u \quad \text{og} \quad \angle O_2LR = 90° - \angle RLC = u \ ,$$

så vi i ΔO_2LR får

$$RO_2 = r_2\cdot \sin u \ .$$

I ΔBLO_2 er

$$r_2 = q\cdot \sin w \ .$$

Altså får vi af (1), at

$$k_2 = 2\cos v\cdot \cos u - q\cdot \cos w\cdot \cos u + r_2\cdot \sin u + r_2$$

$$= 2\cos v\cdot \cos u - q\cdot \cos w\cdot \cos u + r_2(1 + \sin u)$$

$$= 2\cos v\cdot \cos u - q\cdot \cos w\cdot \cos u + q\cdot \sin w(1 + \sin u)$$

$$= 2\cos v\cdot \cos u - q\cdot \cos w\cdot \cos u + q\cdot \sin w + q\cdot \sin w\cdot \sin u$$

$$= 2\cos v\cdot \cos u + q(\sin w\cdot \sin u - \cos w\cdot \cos u + \sin w)$$

$$= 2\cos v\cdot \cos u + q(\sin w - \cos(u + w))$$

$$= 2\cos v \cdot \cos u + \frac{2(\sin w - \cos(v+w)) \cdot (\sin w - \cos(u+w))}{\cos^2 w} \quad . \tag{2}$$

Den vinkelrette afstand k_1 fra det øverste punkt T på cirklen med centrum O_1 til AC fås ved i (2) at ombytte u og v. Da u og v indgår symmetrisk i (2), er $k_1 = k_2$. Dermed ligger T og S på samme korde parallel med AC i den omskrevne cirkel, så de to cirkler med centre O_1 og O_2 netop tangerer denne korde.

Måske er det umuligt at gennemføre et rent euklidisk bevis med ikke for udspekulere- de hjælpemidler (fx inversion), men redaktøren modtager gerne i fremtiden et sådant bevis, hvis nogle af læserne skulle have held til at finde et.