# Svar på opgave 360 (Maj 2019)

## *Opgave:*

**a.** Bestem samtlige delmængder $\{a,b\}$ af naturlige tal med den egenskab, at forskellen mellem det aritmetiske middeltal $A$ af $a$ og $b$ og det geometriske middeltal $G$ af $a$ og $b$ er 1, idet

$$A = \tfrac{1}{2}(a+b) \quad , \quad G = \sqrt{ab} \ .$$

**b.** Bestem samtlige delmængder $\{a,b\}$ af naturlige tal med den egenskab, at forskellen mellem det aritmetiske middeltal $A$ af $a$ og $b$ og det harmoniske middeltal $H$ af $a$ og $b$ er 1, idet

$$A = \tfrac{1}{2}(a+b) \quad , \quad H = \frac{2ab}{a+b} \ .$$

## *Besvarelse:*

**a.**

*1. metode*

Det aritmetiske middeltal er større end eller lig med det geometriske, så vi kræver, at

$$A - G = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = 1 \ .$$

Vi kan forudsætte, at $a \geq b$ og omskrive sådan:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a+b-2\sqrt{ab} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{a}-\sqrt{b} = \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\tfrac{a}{2}} - \sqrt{\tfrac{b}{2}} = 1 \ .$$

Altså findes et tal $k$, så

$$\sqrt{\tfrac{a}{2}} = k+1 \quad , \quad \sqrt{\tfrac{b}{2}} = k \ .$$

Dermed er

$$a = 2(k+1)^2 \quad , \quad b = 2k^2 \ .$$

Da $a$ og $b$ er naturlige tal, er $k$ det også. Mængder af den søgte type er altså

$$\{a,b\} = \{2(k+1)^2 \, , \, 2k^2\} \ ,$$

dvs. $a$ og $b$ er det dobbelte af konsekutive kvadrattal. Vi får

$$\frac{a+b}{2} = \frac{2(k+1)^2 + 2k^2}{2} = (k+1)^2 + k^2 = 2k^2 + 2k + 1$$

og

$$\sqrt{ab} = \sqrt{2(k+1)^2 \cdot 2k^2} = 2(k+1)\cdot k = 2k^2 + 2k \ .$$

For $k = 3$ får vi $\{a,b\} = \{32,18\}$ og $k = 4$ giver $\{a,b\} = \{50,32\}$, og

$$\tfrac{1}{2}(32+18)=25\ ,\ \sqrt{32\cdot 18}=24 \qquad \text{og} \qquad \tfrac{1}{2}(50+32)=41\ ,\ \sqrt{50\cdot 32}=40\ .$$

*2. metode*

Idet $A$ - 1 = $G$ = $\sqrt{ab}$ , er $G$ enten et naturligt tal eller et irrationalt tal. Ven- stre side $A$ - 1 er rational , så $G$ og dermed $A$ er hele tal. Vi kan antage, at $a \geq b$ og sætte

$$a = A + s \quad , \quad b = A - s$$

for et passende naturligt tal $s$. Så er

$$A-1=\sqrt{(A+s)(A-s)} \quad \Leftrightarrow \quad (A-1)^2 = A^2 - s^2 \quad \Leftrightarrow \quad s^2 = 2A - 1\ .$$

Vi ser, at $s$ kan vælges frit blandt de ulige tal, så $s = 2t + 1$. Så er

$$A=\tfrac{1}{2}(s^2+1)=\tfrac{1}{2}(4t^2+4t+1+1)=2t^2+2t+1\ ,$$

og dermed får vi parameterfremstillingen for de søgte delmængder $\{a,b\}$:

$$a = A + s = 2t^2 + 2t + 1 + 2t + 1 = 2t^2 + 4t + 2 = 2(t + 1)^2$$

$$b = A - s = 2t^2 + 2t + 1 - 2t - 1 = 2t^2\ .$$

*3. metode*

Vi sætter $a = r$ og $b = r \cdot s^2$, hvor $s^2$ er et rationalt tal. Så er

$$\mathrm{A} = \tfrac{1}{2}(r+rs^2) \quad , \quad G=\sqrt{r\cdot rs^2}=rs\ ,$$

hvoraf

$$A-G=\tfrac{1}{2}r(1+s^2)-rs=\tfrac{1}{2}r(1+s^2-2s)=\tfrac{1}{2}r(s-1)^2\ .$$

Vi får, at

$$A-G=1 \quad \Leftrightarrow \quad r(s-1)^2=2 \quad \Leftrightarrow \quad s=\sqrt{\frac{2}{r}}+1\ .$$

Vi sætter $r = 2t^2$, hvor $t$ er et naturligt tal og får

$$s=\sqrt{\frac{2}{r}}+1=\sqrt{\frac{2}{2t^2}}+1=\frac{1}{t}+1\ .$$

Så er

$$a = 2t^2 \quad , \quad b = rs^2 = 2t^2\left(\tfrac{1}{t}+1\right)^2=2+4t+2t^2=2(t+1)^2\ .$$

En parameterfremstilling for de søgte delmængder er altså

$$\{a,b\} = \{2t^2\ , 2(t + 1)^2\} \quad , \quad t \in N\ .$$

*4. metode*

Vi får, at

$$A - G = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}(a+b)-\sqrt{ab}=1 \quad \Leftrightarrow \quad a+b-2=2\sqrt{ab}\ .$$

Da $a \neq b$ og $2\sqrt{ab}$ er hel, er

$$2\sqrt{ab} = n \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{n^2}{4b} \ .$$

Dette indsættes:

$$a + b - 2\sqrt{ab} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n^2}{4b} + b - n = 2 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 - 4bn + 4b^2 - 8b = 0 \ .$$

Diskriminanten i denne andengradsligning i *n* er

$$16b^2 - 4(4b^2 - 8b) = 32b \ ,$$

så vi får

$$n = \frac{4b \pm \sqrt{32b}}{2} = 2b \pm 2\sqrt{2b} \ .$$

Her må roden være et helt tal, så

$$2b = m^2 \quad \Leftrightarrow \quad b = \tfrac{1}{2} m^2 \ .$$

Da b er hel, er $m^2$ er lige kvadrattal, så

$$b = \frac{(2r)^2}{2} = 2r^2 \ ,$$

hvoraf

$$n = 2b \pm 2\sqrt{2b} = 4r^2 \pm 2\sqrt{4r^2} = 4r^2 \pm 4r = 4r(r \pm 1) \ .$$

Vi får endelig, at

$$a = \frac{n^2}{4b} = \frac{16r^2(r-1)^2}{8r^2} = 2(r-1)^2 \quad \text{eller} \quad a = \frac{16r^2(r+1)^2}{8r^2} = 2(r+1)^2 \ .$$

Da tallene *a* og *b* optræder symmetrisk, får vi parameterfremstillingen

$$\{a,b\} = \{2r^2 \ , 2(r+1)^2\} \ .$$

**b.**

*1. metode*

I almindelighed er $A \geq G \geq H$. Vi finder

$$A - H = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (a+b)^2 - 4ab = 2(a+b) \ .$$

Denne ligning ser lidt uigennemskuelig ud, men vi kan se på kurven/kurverne med lig- ningen

$$(x + y)^2 - 4xy = 2(x + y) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 2xy = 2x + 2y$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 - (2x + 2)y + x^2 - 2x = 0$$

Vi opfatter dette som en andengradsligning i *y* med diskriminanten

$$(2x + 2)^2 - 4(x^2 - 2x) = 16x + 4 \ .$$

Da *x* er et positivt helt tal, er denne positiv, så vi får

$$y = \frac{2x + 2 \pm \sqrt{16x + 4}}{2} = x + 1 \pm \sqrt{4x + 1} \ .$$

Fortegnet minus kan bruges, hvis

$$x+1 \geq \sqrt{4x+1} \ ,$$

hvoraf

$$x^2 + 2x + 1 \geq 4x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x \geq 0 \ ,$$

så $x \geq 2$.

Hvis vi ønsker at $y$ skal være positiv og hel, må der findes et tal $k$, så $4x + 1 = k^2$ eller $x = \frac{1}{4}(k^2 - 1)$. Dette kræver, at $k$ er et ulige kvadrattal, fx. $k = 2p + 1$. Så er

$$x = \tfrac{1}{4}(k^2 - 1) = \tfrac{1}{4}(4p^2 + 4p + 1 - 1) = p^2 + p$$

og dermed

$$y = x + 1 \pm \sqrt{4x+1} = p^2 + p + 1 \pm \sqrt{(2p+1)^2} = p^2 + p + 1 \pm (2p+1) = \begin{cases} p^2 + 3p + 2 \\ p^2 - p \end{cases} .$$

Parameterfremstillinger for mængder $\{a,b\}$ af naturlige tal, for hvilke forskellen mellem det aritmetiske og harmoniske middeltal er 1, er derfor

$$\{a,b\} = \{p^2 + p \ , p^2 + 3p + 2\} \quad \text{og} \quad \{a,b\} = \{p^2 + p \ , p^2 - p\} \ .$$

Vi får for $\{a,b\} = \{p^2 + p \ , p^2 + 3p + 2\}$, at

$$A = \tfrac{1}{2}(a+b) = \tfrac{1}{2}(2p^2 + 4p + 2) = p^2 + 2p + 1$$

og

$$H = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2(p^2+p)(p^2+3p+2)}{2p^2+4p+2} = \frac{p(p+1)(p+2)(p+1)}{(p+1)^2} = p^2 + 2p \ .$$

Tilsvarende kontrolleres den anden mulighed.
Hvis $p = 4$ får vi mulighederne

$$\{a,b\} = \{20,30\} \ \text{ og } \ \{a,b\} = \{20,12\} \ ,$$

hvor

$$A = 25 \ , \ H = \tfrac{2\cdot 20\cdot 30}{20+30} = \tfrac{1200}{50} = 24 \qquad \text{og} \qquad A = 16 \ , \ H = \tfrac{2\cdot 20\cdot 12}{20+12} = \tfrac{480}{32} = 15 \ .$$

*2. metode*

Vi kræver, at $H = A - 1$. Vi har, at

$$H = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2G^2}{2A} = \frac{G^2}{A} \ . \tag{1}$$

Vi antager, at $a \geq b$ og sætter

$$a = A + s \quad , \quad b = A - s$$

for et passende naturligt tal $s$. Så er

$$G^2 = ab = A^2 - s^2 \ , \tag{2}$$

og efter (1) er

$$G^2 = A \cdot H = A(A - 1) \ ,$$

som indsat i (2) giver

$$A(A - 1) = A^2 - s^2 \quad \Leftrightarrow \quad s^2 = A \ .$$

Her er $A$ et helt tal. Thi hvis $A = \frac{1}{2}(a+b)$ ikke var hel, var $A = \frac{1}{2}k$, hvor $k$ er ulige, og dermed ville

$$A(A - 1) = \tfrac{k}{2} \cdot \tfrac{k-2}{2} = \tfrac{1}{4}k(k-2) \ ,$$

hvor $k$ og $k$ - 2 er ulige, så $A(A - 1)$ ikke var hel. Dette strider imod at $A(A - 1) = G^2$ er hel.
Nu får vi endelig parameterfremstillingen for den søgte delmængder $\{a,b\}$:

$$a = A + s = s^2 + s \quad , \quad b = A - s = s^2 - s \, .$$

Vi udregner som kontrol:

$$A = \tfrac{1}{2}(a + b) = \tfrac{1}{2}(s^2 + s + s^2 - s) = s^2 \, ,$$

$$H = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2(s^2+s)(s^2-s)}{2s^2} = \frac{s^4 - s^2}{s^2} = s^2 - 1 = A - 1 \, .$$

**Bemærkning.**

Vi supplerer opgaven med følgende analoge opgaver:

**c.** Bestem samtlige delmængder $\{a,b\}$ af naturlige tal, så forskellen mellem det kvadra- tiske middeltal $K$ og det aritmetiske middeltal $A$ er 1, idet

$$K = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \quad , \quad A = \frac{a+b}{2} \, .$$

**d.** Bestem samtlige delmængder $\{a,b\}$ af naturlige tal, så forskellen mellem det geome- triske middeltal $G$ og det harmoniske middeltal $H$ er 1, idet

$$G = \sqrt{ab} \quad , \quad H = \frac{2ab}{a+b} \, .$$

*Løsning c.*

Vi antager at $a \geq b$. I almindelighed er $K \geq A$, så vi har, at

$$K = A + 1 \qquad \text{eller} \qquad \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \frac{a+b}{2} + 1 \, .$$

Heraf fås

$$\frac{a^2+b^2}{2} = \frac{(a+b)^2}{4} + a + b + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2a^2 + 2b^2 = (a+b)^2 + 4a + 4b + 4$$
$$\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 - 2ab = 4(a + b) + 4 \quad \Leftrightarrow \quad (a - b)^2 - 4(a + b) = 4$$
$$\Leftrightarrow \quad (a - b)^2 - 4(a - b) = 8b + 4 \quad \Leftrightarrow \quad (a - b)^2 - 4(a - b) + 4 = 8b + 8$$
$$\Leftrightarrow \quad (a - b - 2)^2 = 8b + 8 \quad \Leftrightarrow \quad a - b - 2 = \pm 2\sqrt{2b+2} \, . \tag{3}$$

Antag, at fortegnet minus var brugbart, dvs. $a - b - 2 < 0$ eller $a < b + 2$. Så ville gælde, at $b \leq a < b + 2$.
Muligheden $a = b$ er ikke brugbar, idet så $K = A$. Muligheden $a = b + 1$ giver efter (3):

$$b + 1 - b - 2 = -2\sqrt{2b+2} \quad \Leftrightarrow \quad -1 = -2\sqrt{2b+2} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2b+2} = \tfrac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad 2b + 2 = \tfrac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad b = -\tfrac{7}{8} \, ,$$

hvilket ikke er brugbart.

Derfor kan kun fortegnet + i (3) bruges, så vi har

$$a - b - 2 = 2\sqrt{2b+2}\ .$$

Altså er $2n + 2$ et lige kvadrattal, dvs. $2b + 2 = (2n)^2$, hvoraf

$$2b + 2 = 4n^2 \quad \Leftrightarrow \quad b = 2n^2 - 1\ ,$$

og

$$a = 2n^2 - 1 + 2 + 2 \cdot 2n = 2n^2 + 4n + 1 = 2(n+1)^2 - 1\ .$$

Dermed er parameterfremstillingen for de søgte delmængder:

$$\{a,b\} = \{2(n+1)^2 - 1\ ,\ 2n^2 - 1\}\ ,\quad n \in \mathrm{N}\ .$$

Vi kontrollerer, at

$$K = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \sqrt{\frac{(2(n+1)^2-1)^2+(2n^2-1)^2}{2}} = \sqrt{\frac{8n^4+16n^3+16n^2+8n+2}{2}}$$

$$= \sqrt{4n^4+8n^3+8n^2+4n+1} = \sqrt{(2n^2+2n+1)^2} = 2n^2+2n+1$$

og

$$A+1 = \frac{2(n+1)^2-1+2n^2-1}{2}+1 = \frac{4n^2+4n}{2}+1 = 2n^2+2n+1\ .$$

For $n = 2$ får vi $\{a,b\} = \{17,7\}$ og

$$K = \sqrt{\frac{17^2+7^2}{2}} = \sqrt{\frac{338}{2}} = \sqrt{169} = 13 \quad \text{og} \quad A = \frac{17+7}{2} = 12\ .$$

*Løsning d.*

Der findes ingen mængder $\{a,b\}$ af naturlige tal, der opfylder det ønskede. Dette indses således: Da $a = b$ ikke er muligt, antager vi igen, at $a > b$. Idet $G \geq H$, kræver vi, at $G = H + 1$, dvs.

$$\sqrt{ab} = \frac{2ab}{a+b}+1 \quad \Leftrightarrow \quad ab = \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2}+\frac{4ab}{a+b}+1$$

$$\Leftrightarrow \quad ab(a+b)^2 = 4a^2b^2 + 4ab(a+b) + (a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (a+b)^2 = 4ab+4(a+b)+\frac{(a+b)^2}{ab}\ .$$

Vi slutter, at $\frac{(a+b)^2}{ab}$ er et helt tal, dvs. vi sætter

$$\frac{(a+b)^2}{ab} = n$$

for et passende naturligt tal $n$. Vi får

$$n = \frac{a^2+b^2+2ab}{ab} = \frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\ .$$

Heraf følger, at $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ er et naturligt tal. Dette er kun muligt (se neden for), hvis $a = b$, hvilket ikke er muligt.

Antag nemlig, at $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} = k \in N$. Så er

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=k\cdot\frac{a}{b} \quad\Leftrightarrow\quad \left(\frac{a}{b}\right)^2-k\cdot\frac{a}{b}+1=0\,.$$

Diskriminanten i denne andengradsligning er $k^2$ - 4, som skal være et kvadrattal. Dette er kun muligt for $k$ = 2, idet to kvadrattal ikke kan have en differens på 4. Altså er

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2-2\cdot\frac{a}{b}+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(\frac{a}{b}-1\right)^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad a=b\,.$$

**Besvarelser modtaget fra:**

- Jens-Søren Andersen
- Magnus Bøe
- Johs. Christensen
- Walther Janous
- Hans Mortensen
- Asger Olesen
- Jørgen Olesen
- Jan Erik Pedersen
- Palle Bak Petersen
- Eskil Wadsholt
- Con Amore Problemgruppe.

●●●●●●●●●●●●

# Et spørgsmål

Næste opgave offentliggøres planmæssigt 15/8-2019 efter sommerferien. Hen over sommeren ville de skarpsindige og opfindsomme løsere/læsere måske kunne finde tid til at tænke over nedenstående smukke opgave, som redaktøren desværre ikke kender noget svar på. Send gerne en løsning, som i givet fald offentliggøres efter ferien.

**Sommeropgave**

I $\Delta ABC$ er $O$ centrum for den omskrevne cirkel og $DE$ er en korde parallel med $AC$.
En cirkel med centrum $O_1$ tangerer $DE$, $AB$ og den omskrevne cirkel, og en cirkel med centrum $O_2$ tangerer $DE$, $BC$ og den omskrevne cirkel.

Vis, at $\angle ABO_1 = \angle CBO_2$.