Svar på opgave 356 (Januar 2019)

Opgave:

Vis, at der for $0 \le x \le \frac{1}{2}\pi$ gælder

$$5x \le 8\sin x - \sin 2x \le 6x$$

Besvarelse:

1. metode.

I. Vi viser venstre ulighed.

Vi sætter

$$f(x) = 8\sin x - \sin 2x - 5x\ .$$

Så gælder for $0 \le x \le \frac{1}{3}\pi$:

$$f'(x) = 8\cos x - 2\cos 2x - 5 = 8\cos x - 2(2\cos^2 x - 1) - 5$$

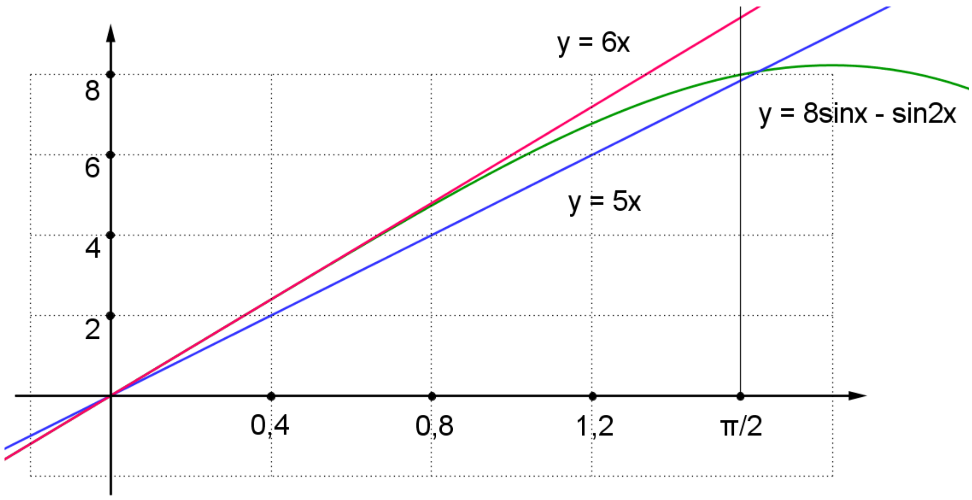
$$= -4\cos^2 x + 8\cos x - 3 = (3 - 2\cos x)(2\cos x - 1) > 0\ .$$

Desuden er $f(0) = 0$, så $f(x)$ er ikke-negativ og voksende i intervallet $\left[0;\frac{1}{3}\pi\right]$.

For $\frac{1}{3}\pi \le x \le \frac{1}{2}\pi$ er $f'(x) \le 0$, så $f(x)$ er aftagende. Idet

$$f\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) = 8\sin\tfrac{\pi}{3} - \sin\tfrac{2\pi}{3} - 5\cdot\tfrac{\pi}{3} \approx\ 0{,}8262 \quad \text{og} \quad f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 8 - \tfrac{5\pi}{2} \approx 0{,}1460\ ,$$

er $f(x) > 0$ i $\left[0;\frac{1}{2}\pi\right]$.



II. Vi viser højre ulighed.

Funktionen

$$g(x) = 8\sin x - \sin 2x - 6x$$

har for $0 \le x < \frac{1}{2}\pi$ den afledede

$$g'(x) = 8\cos x - 2\cos 2x - 6 = 8\cos x - 2(2\cos^2 x - 1) - 6$$

$$= -4\cos^2 x + 8\cos x - 4 = -4(\cos x - 1)^2 < 0 \ .$$

Altså er $g(x)$ aftagende i $\left[0; \frac{1}{2}\pi\right]$, og da $g(0) = 0$, er $g(x) < 0$ i intervallet.

2. metode.

Uligheden er opfyldt for $x = 0$, idet der her gælder lighedstegn. Derefter viser vi, at der for $0 < x \le \frac{1}{2}\pi$ gælder

$$5 \le \frac{8\sin x - \sin 2x}{x} \le 6 \ .$$

Vi sætter

$$f(x) = \frac{8\sin x - \sin 2x}{x}$$

og får den afledede

$$f'(x) = \frac{x \cdot (8\cos x - 2\cos 2x) - 8\sin x + \sin 2x}{x^2} \ .$$

Her sætter vi

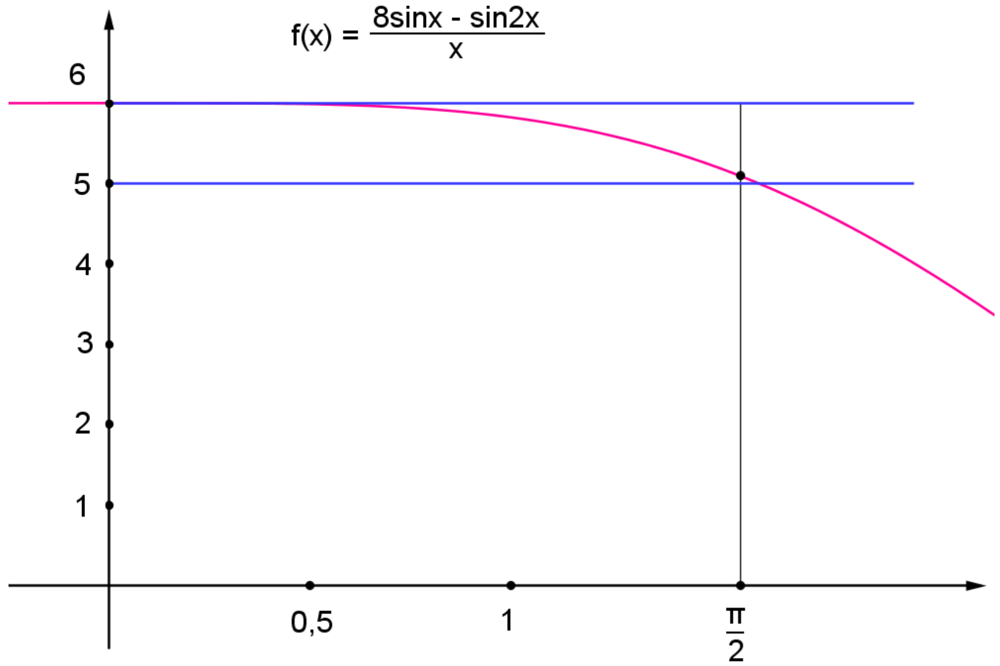
$$t(x) = x \cdot (8\cos x - 2\cos 2x) - 8\sin x + \sin 2x \ ,$$

hvoraf

$$t'(x) = 8\cos x - 2\cos 2x + x \cdot (-8\sin x + 4\sin 2x) - 8\cos x + 2\cos 2x$$

$$= x \cdot (8\sin x \cdot \cos x - 8\sin x) = 8x \cdot \sin x \cdot (\cos x - 1) < 0$$

for $0 < x < \pi$. Da $t(0) = 0$ følger, at $t(x)$ er aftagende, så $t(x) < 0$. Så er $f'(x) < 0$ for $0 < x < \pi$, så $f(x)$ er aftagende i $]0;\pi]$.



Vi har, at

$$f(x) = 8 \cdot \frac{\sin x}{x} - 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \to 8 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 6 \quad \text{for} \quad x \to 0 \,,$$

og

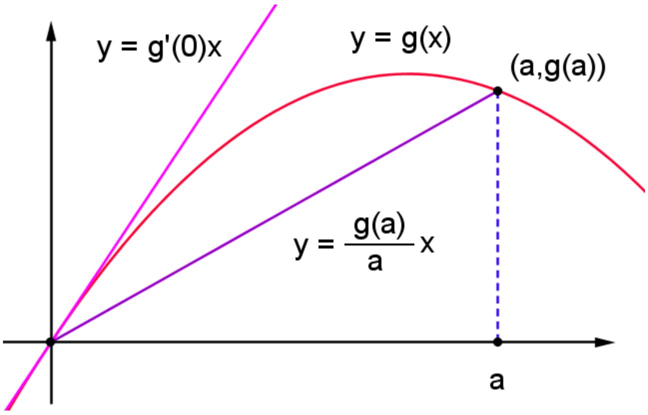
$$f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \frac{8 - \sin \pi}{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{\pi} > \frac{16}{3,2} = 5 \,.$$

Heraf fås, at $5 < f(x) < 6$ for $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Bemærkning. Hvis en funktion $g(x)$ opfylder, at $g(0) = 0$ og $g''(x)$ har konstant fortegn i intervallet $]0;a[$, gælder at $g(x)$ ligger mellem

$$g'(0) \cdot x \quad \text{og} \quad \tfrac{g(a)}{a} \cdot x$$

i $[0;a]$. Dette følger af, at grafen for den konvekse eller konkave funktion $g(x)$ i interval- let $[0;a]$ ligger mellem tangenten i (0,0) og sekanten mellem (0,0) og punktet $(a,g(a))$ på grafen.



I opgaven gælder i intervallet]0;π[, at

$$g(x) = 8\sin x - \sin 2x \quad , \quad g'(x) = 8\cos x - 2\cos 2x \quad ,$$

$$g''(x) = -8\sin x + 4\sin 2x = -8\sin x(1 - \cos x) < 0 \quad .$$

For $a = \frac{\pi}{2}$ er

$$\frac{g(a)}{a} = \frac{g\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{\pi} > \frac{16}{3{,}2} = 5 \quad ,$$

og da $g'(0) = 6$ ligger $g(x)$ mellem $6x$ og $\frac{16}{\pi}x$, dvs.

$$5x < \frac{16}{\pi}x \le g(x) \le 6x \; .$$

Besvarelser modtaget fra: Jens-Søren Andersen, Johs. Christensen, Hans Chr. Hulvej, Walther Janous, Hans Mortensen, Asger Olesen, Palle Bak Petersen, Jens Skak-Nielsen, Con Amore Problemgruppe.