Svar på opgave 353 (Oktober 2018)

Opgave:

Bestem samtlige sæt (a,b,c) af naturlige tal, så brøkerne

$$\frac{a+1}{b} \quad , \quad \frac{b+1}{c} \quad , \quad \frac{c+1}{a}$$

er naturlige tal.

Besvarelse:

1. metode. Da a, b og c er naturlige tal og brøkerne også er det, har vi, at

$$b \le a+1 \ , \ c \le b+1 \ , \ a \le c+1 \ ,$$

hvilket giver

$$c-1 \le b \le a+1 \le c+2 \ .$$

Derfor kan a antage værdierne

$$c-2 \ , \ c-1 \ , \ c \ , \ c+1 \ .$$

Metoden er nu (lidt træls) at gennemgå disse tilfælde efter tur.

I. $a = c - 2$

De tre brøker er

$$\frac{c-1}{b} \ , \ \frac{b+1}{c} \ , \ \frac{c+1}{c-2} = 1 + \frac{3}{c-2} \ .$$

Her må $c \ge 3$.

- Hvis $c = 3$, er $a = 1$ og brøkerne er

$$\frac{2}{b} \ , \ \frac{b+1}{3} \ , \ \frac{2}{1} \ .$$

Altså er $b = 2$, så vi har funder løsningen (a,b,c) = (1,2,3).

- Hvis $c = 4$, er brøken $\frac{c+1}{c-2}$ ikke hel.

- Hvis $c = 5$, er $a = 3$ og brøkerne er

$$\frac{4}{b} \ , \ \frac{b+1}{5} \ , \ \frac{6}{3} \ .$$

Eneste mulighed er $b = 4$, så vi har løsningen (a,b,c) = (3,4,5).

- Hvis $c \ge 6$, er brøken $\frac{c+1}{c-2}$ ikke hel.

II. $a = c - 1$

De tre brøker er

$$\frac{c}{b}\ ,\ \frac{b+1}{c}\ ,\ \frac{c+1}{c-1}=1+\frac{2}{c-1}\ .$$

- Hvis $c = 2$, er $a = 1$ og brøkerne er

$$\frac{2}{b}\ ,\ \frac{b+1}{2}\ ,\ \frac{3}{1}\ .$$

Her kan kun $b = 1$ bruges og vi får løsningen $(a,b,c) = (1,1,2)$.

- Hvis $c = 3$, er $a = 2$ og brøkerne er

$$\frac{3}{b}\ ,\ \frac{b+1}{3}\ ,\ \frac{4}{2}\ .$$

Vi får ingen løsninger for b.

- Hvis $c \geq 4$, er brøken $\frac{c+1}{c-2}$ ikke hel.

III. $a = c$

De tre brøker er

$$\frac{c+1}{b}\ ,\ \frac{b+1}{c}\ ,\ \frac{c+1}{c}=1+\frac{1}{c}\ .$$

Her er eneste mulighed $c = 1$, der giver $a = 1$ og brøkerne er

$$\frac{2}{b}\ ,\ \frac{b+1}{1}\ ,\ \frac{2}{1}\ .$$

Mulighederne er $b = 1$ og $b = 2$, så vi får løsningerne $(a,b,c) = (1,1,1)$ og $(a,b,c) = (1,2,1)$.

IV. $a = c + 1$

De tre brøker er

$$\frac{c+2}{b}\ ,\ \frac{b+1}{c}\ ,\ \frac{c+1}{c+1}\ .$$

- Hvis $c = 1$, er $a = 2$ og brøkerne er

$$\frac{3}{b}\ ,\ \frac{b+1}{1}\ ,\ \frac{2}{2}\ ,$$

som giver mulighederne $b = 1$ og $b = 3$. Vi får løsningerne $(a,b,c) = (2,1,1)$ og $(a,b,c) = (2,3,1)$.

- Hvis $c = 2$, er $a = 3$ og brøkerne er

$$\frac{4}{b}\ ,\ \frac{b+1}{2}\ ,\ \frac{3}{3}\ .$$

Eneste mulighed er $b = 1$, så $(a,b,c) = (3,1,2)$.

- Hvis $c = 3$, er $a = 4$ og brøkerne er

$$\frac{5}{b}\ ,\ \frac{b+1}{3}\ ,\ \frac{4}{4}\ .$$

Her er $b = 5$, så vi får løsningen $(a,b,c) = (4,5,3)$.

- Hvis $c = 4$, er $a = 5$ og brøkerne er

$$\frac{6}{b}\,,\ \frac{b+1}{4}\,,\ \frac{5}{5}\,.$$

Her er $b = 3$ eneste mulighed, så en løsning er $(a,b,c) = (5,3,4)$.

- Hvis $c \geq 5$ findes ingen løsninger for b.

I alt har vi fundet 10 løsninger:

$$\begin{aligned}(a,b,c)\ :\ & (1,1,1)\ ,\ (1,1,2)\ ,\ (1,2,1)\ ,\ (2,1,1)\ ,\ (1,2,3)\ ,\\ & (3,1,2)\ ,\ (2,3,1)\ ,\ (3,4,5)\ ,\ (5,3,4)\ ,\ (4,5,3)\ .\end{aligned}$$

Det fremgår i øvrigt af de givne brøker, at hvis (a,b,c) en løsning, er de cykliske permutationer (c,a,b) og (b,c,a) også løsninger.

---

2. metode. Når a, b og c ombyttes cyklisk, ombyttes også brøkerne $\frac{a+1}{b}$, $\frac{b+1}{c}$, $\frac{c+1}{a}$ cyklisk.

I. Antag først, at to af tallene a, b og c er ens. På grund af den cykliske symmetri kan vi antage, at $a = b$. Vi har så, at

$$\frac{a+1}{b} = \frac{a+1}{a} = 1 + \frac{1}{a}$$

er et naturligt tal, så $a = 1$. Altså er $a = b = 1$ og tallet

$$\frac{b+1}{c} = \frac{2}{c}$$

er naturligt. Dermed er $c = 1$ eller $c = 2$. Altså er $(a,b,c) = (1,1,1)$ eller $(a,b,c) = (1,1,2)$. Kontrol viser, at disse talsæt fører til heltallige brøker.

II. Antag, at tallene a, b og c er indbyrdes forskellige. På grund af den cykliske symme- tri kan vi antage, at c er det største af tallene.

Så er $b + 1 \leq c$, så

$$\frac{b+1}{c} \leq 1\,,$$

og da $\frac{b+1}{c}$ er et naturligt tal, er $\frac{b+1}{c}$ = 1, så $c = b + 1$. Da $a < c$ og $a \neq b$, er $a < b$. Da $\frac{a+1}{b} \leq 1$ og $\frac{a+1}{b}$ er et naturligt tal, er $b = a + 1$.

Nu gælder, at

$$\frac{c+1}{a} = \frac{b+2}{a} = \frac{a+3}{a} = 1 + \frac{3}{a}$$

er et naturligt tal, så $a = 1$ eller $a = 3$. Altså er $(a,b,c) = (1,2,3)$ eller $(a,b,c) = (3,4,5)$. Kontrol viser, at disse talsæt fører til heltallige brøker.

Dermed har vi som løsninger

$$(a,b,c) : (1,1,1)\ ,\ (1,1,2)\ ,\ (1,2,3)\ ,\ (3,4,5)$$

samt cykliske ombytninger af tallene i disse sæt, i alt 10 løsninger.

---

3. metode. Vi har, at

$$a + 1 = pb \quad , \quad b + 1 = qc \quad , \quad c + 1 = ra \ ,$$

hvor p, q og r er naturlige tal. Multiplikation giver

$$(a + 1)(b + 1)(c + 1) = pqrabc \ ,$$

så at

$$abc < pqrabc \quad \Leftrightarrow \quad pqr > 1 \ .$$

Mindst en af faktorerne p, q og r er dermed større end 1. Vi kan på grund af den cykliske symmetri antage, at $p \geq 2$. Da $q \geq 1$ og $r \geq 1$ har vi

$$a + 1 \geq 2b \quad , \quad b + 1 \geq c \quad , \quad c + 1 \geq a \ . \tag{1}$$

Addition giver

$$a + b + c + 3 \geq 2b + c + a \quad \Leftrightarrow \quad b \leq 3 \ .$$

Vi deler op i tilfælde.

I. *b* = 1.

Efter (1) gælder, at

$$c \leq b + 1 = 2 \quad \text{og} \quad a \leq c + 1 \leq 2 + 1 = 3 \ .$$

Hvis $a = 1$ gælder som nævnt, at $c \leq 2$, så $c = 1$ eller $c = 2$. Vi får

$$\begin{aligned} a + 1 = pb \quad &\Leftrightarrow \quad 2 = p \\ b + 1 = qc \quad &\Leftrightarrow \quad 2 = qc \\ c + 1 = ra \quad &\Leftrightarrow \quad c + 1 = r \ . \end{aligned}$$

Her er både $c = 1$ og $c = 2$ brugbare, så løsninger er

$$(a,b,c) : (1,1,1) \ , \ (1,1,2) \ ,$$

som begge er brugbare.

Hvis $a = 2$ får vi

$$\begin{aligned} a + 1 = pb \quad &\Leftrightarrow \quad 3 = p \\ b + 1 = qc \quad &\Leftrightarrow \quad 2 = qc \\ c + 1 = ra \quad &\Leftrightarrow \quad c + 1 = 2r \ . \end{aligned}$$

Her kan vi bruge $c = 1$, mens $c = 2$ giver en ikke-hel værdi for r. En brugbar løsning er $(a,b,c) = (2,1,1)$

Hvis $a = 3$ får vi

$$\begin{aligned} a + 1 = pb \quad &\Leftrightarrow \quad 4 = p \\ b + 1 = qc \quad &\Leftrightarrow \quad 2 = qc \\ c + 1 = ra \quad &\Leftrightarrow \quad c + 1 = 3r \ . \end{aligned}$$

Dette giver

$$2 = q(3r - 1) \geq 2q \quad \text{så} \quad q = 1 \ .$$

Så er $c = 2$ og $c + 1 = 3 = 3r$, så $r = 1$. En løsning er dermed $(a,b,c) = (3,1,2)$.

II. *b* = 2. Efter (1) er

$$a + 1 \geq 2b = 4 \quad \Leftrightarrow \quad a \geq 3 \ .$$

Desuden er

$$b + 1 \geq c \quad \Leftrightarrow \quad c \leq 3 \quad \text{og} \quad a \leq c + 1 \leq 4 \ .$$

Dermed er $a = 3$ eller $a = 4$. Da $a + 1 = pb = 2p$, er $a = 4$ ikke brugbar.

Hvis $a = 3$, er $p = 2$ og

$$c + 1 = ra = 3r$$

og

$$b + 1 = qc \quad \Leftrightarrow \quad 3 = qc \quad \Leftrightarrow \quad 3 = q(3r - 1) \geq 2q \ .$$

Dermed er $q = 1$, så $3 = c$. Men så er

$$3 = q(3r - 1) \quad \Leftrightarrow \quad 3r = 4 \ ,$$

hvilket er umuligt.

III. *b* = 3. Da $p \geq 2$ har vi, at

$$a + 1 = pb = 3p \geq 6 \quad \text{så} \quad a \geq 5 \ .$$

Hvis $a = 5$, får vi

$$a + 1 = pb \quad \Leftrightarrow \quad 6 = 3p$$
$$b + 1 = qc \quad \Leftrightarrow \quad 4 = qc$$
$$c + 1 = ra \quad \Leftrightarrow \quad c + 1 = 5r \ .$$

Dermed er

$$4 = qc = q(5r - 1) \geq 4q \ .$$

Altså er $q = 1$, hvilket giver $c = 4$ og $r = 1$. En løsning er dermed $(a,b,c) = (5,3,4)$.
Hvis $a = 6$ er

$$a + 1 = pb \quad \Leftrightarrow \quad 7 = 3p \ ,$$

hvilket er umuligt.

I alt har vi fundet løsningerne

$$(a,b,c) \ : \ (1,1,1) \ , \ (1,1,2) \ , \ (2,1,1) \ , \ (3,1,2) \ , \ (5,3,4) \ .$$

Hertil skal føjes de cykliske permutationer:

$$(a,b,c) \ : \ (1,2,1) \ , \ (1,2,3) \ , \ (2,3,1) \ , \ (3,4,5) \ , \ (4,5,3) \ .$$

Besvarelser modtaget fra:

Jens-Søren Andersen, Johs. Christensen, Walther Janous, Hans Mortensen, Asger Olesen, Jørgen Olesen, Palle Bak Petersen, Con Amore Problemgruppe.