Svar på opgave 352 (September 2018)

Opgave:

Vi bringer et par regneopgaver. Brug af hjælpemidler er naturligvis ikke tilladt!

a. Udregn tallet

$$k = \frac{65533^3 + 65534^3 + 65535^3 + 65536^3 + 65537^3 + 65538^3 + 65539^3}{32765 \cdot 32766 + 32767 \cdot 32768 + 32768 \cdot 32769 + 32770 \cdot 32771} \ .$$

b. Vis, at der findes positive reelle tal a, b og c, så

$$a^2 + b^2 + c^2 > 2 \quad , \quad a^3 + b^3 + c^3 < 2 \quad , \quad a^4 + b^4 + c^4 > 2 \ .$$

c. Vi sætter

$$s_1 = 6 \ , \ s_2 = 66 \ , \ s_3 = 666 \ , \ldots , \ s_n = \underbrace{666\ldots66}_{n \text{ 6-taller}}$$

Bestem $s_1 + s_2 + \cdots + s_n$.

d. Find det mindste positive hele tal n med den egenskab, at hvis det første ciffer flyttes hen som det sidste, så er det nye tal $\frac{7}{2}n$.

e. Afgør hvilket af tallene $\sqrt[3]{60}$ og $2 + \sqrt[3]{7}$ der er størst.

Besvarelse:

a. Vi sætter $n = 65536 = 2^{16}$. Så udregnes tælleren til

$$(n - 3)^3 + (n - 2)^3 + (n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3 + (n + 3)^3$$
$$= [(n - 3)^3 + (n + 3)^3] + [(n - 2)^3 + (n + 2)^3] + [(n - 1)^3 + (n + 1)^3] + n^3$$
$$= 2(n^3 + 27n) + 2(n^3 + 12n) + 2(n^3 + 2n) + n^3 = 7(n^3 + 12n) \ .$$

Derefter sætter vi $m = \frac{1}{2}n = 32768$. Så kan vi udregne nævneren til

$$(m - 3)(n - 2) + (m - 1)m + m(m + 1) + (m + 2)(m + 3) = 4m^2 + 12 = n^2 + 12 \ .$$

Altså er

$$k = \frac{7(n^3 + 12n)}{n^2 + 12} = 7n = 7 \cdot 2^{16} = 458752.$$

b.
1. metode
Vi kan fx vælge

$$a = \tfrac{1}{2} \ , \ b = \tfrac{2}{3} \ , \ c = \tfrac{2}{\sqrt{3}} \ .$$

Så er

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{4}+\frac{4}{9}+\frac{4}{3}=\frac{73}{36} > 2 \ ,$$

$$a^4 + b^4 + c^4 = \frac{1}{16}+\frac{16}{81}+\frac{16}{9}=\frac{2641}{1296}=\frac{2\cdot 1296+49}{1296} > 2 \ .$$

Desuden er

$$a^3 + b^3 + c^3 = \frac{1}{8}+\frac{8}{27}+\frac{8}{\sqrt{27}}=\frac{91}{216}+\frac{8}{\sqrt{27}} \ .$$

Vi finder, at

$$\frac{91}{216}+\frac{8}{\sqrt{27}} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{8}{\sqrt{27}} < \frac{341}{216} \quad \Leftrightarrow \quad 8\cdot 216 < 341\cdot\sqrt{27}$$

$$\Leftrightarrow \quad 8\cdot 72 < 341\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3} > \frac{576}{341} \ .$$

Idet

$$3\cdot 31^2 = 2883 > 2809 = 53^2$$

gælder at

$$\sqrt{3} > \frac{53}{31}=\frac{11\cdot 53}{11\cdot 31}=\frac{583}{341}>\frac{576}{341} \ .$$

Dermed er $a^3 + b^3 + c^3 < 2$.

Ønsker vi, at a, b og c er rationale, kan vi vælge $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{2}{3}$, $c = \frac{23}{20}$. Så er

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{7261}{3600} > 2 \ ,$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = \frac{419509}{216000} < 2 \ ,$$

$$a^4 + b^4 + c^4 = \frac{26\ 037\ 121}{12\ 960\ 000} > 2 \ .$$

2. metode

Antag, at $0 < c \le b \le a$. Vi undersøger, om de tre uligheder for et passende positivt tal r er opfyldt af $(a,b,c) = (b + r\ ,\ b\ ,\ b - r)$. Vi får, at

$$a^2 + b^2 + c^2 = (b + r)^2 + b^2 + (b - r)^2 = 3b^2 + 2r^2 > 2 \tag{1}$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = (b + r)^3 + b^3 + (b - r)^3 = 3b^3 + 6br^2 < 2 \tag{2}$$

$$a^4 + b^4 + c^4 = (b + r)^4 + b^4 + (b - r)^4 = 3b^4 + 12b^2r^2 + 2r^4 > 2 \ .$$

I (1) prøver vi med $b = \frac{3}{4}$:

$$\frac{27}{16}+2r^2 > 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2r^2 > \frac{5}{16} \quad \Leftrightarrow \quad r^2 > \frac{5}{32} \ ,$$

og i (2) fås

$$3\cdot\frac{27}{64}+\frac{18}{4}r^2 < 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{9}{2}r^2 < \frac{47}{64} \quad \Leftrightarrow \quad r^2 < \frac{47}{288} \ .$$

Nu er

$$\frac{5}{32} < \frac{47}{288} \quad \Leftrightarrow \quad 5 < \frac{47}{9}$$

hvilket er sandt, så vi har, at

$$\frac{5}{32} < r^2 < \frac{47}{288} .$$

Vi kan her vælge $r = \frac{2}{5}$, idet

$$\frac{5}{32} < \frac{4}{25} < \frac{47}{288} \iff 5 < \frac{128}{25} < \frac{47}{9} \iff 5\cdot 25 < 128 < 25\cdot\frac{47}{9} = \frac{1175}{9} ,$$

hvilket er sandt.

Vi får så

$$a = \tfrac{3}{4} + \tfrac{2}{5} = \tfrac{23}{20} \;,\; b = \tfrac{3}{4} \;,\; c = \tfrac{3}{4} - \tfrac{2}{5} = \tfrac{7}{20}$$

hvilket giver

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{23^2 + 15^2 + 7^2}{20^2} = \frac{803}{400} > 2 ,$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = \frac{23^3 + 15^3 + 7^3}{20^3} = \frac{15885}{8000} < 2 ,$$

$$a^4 + b^4 + c^4 = \frac{23^4 + 15^4 + 7^4}{20^4} = \frac{332867}{160000} > 2 .$$

c. Vi ser, at

$$s_1 = \tfrac{2}{3}(10-1) \;,\; s_2 = \tfrac{2}{3}(10^2-1) \;,\; \ldots ,\; s_n = \tfrac{2}{3}(10^n-1) \;,$$

så at

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_n = \tfrac{2}{3}(10 + 10^2 + \cdots + 10^n) - \tfrac{2}{3}n$$
$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{10^{n+1}-10}{9} - \frac{2n}{3} = \frac{2(10^{n+1}-10-9n)}{27} .$$

d. Vi sætter

$$n = 10^m \cdot a + b ,$$

hvor $1 \le a \le 9$. Det første ciffer i n er altså a, og b er det tal, der dannes af de reste- rende cifre. Det tal, der fremkommer, når det første ciffer anbringes som det sidste er derfor $10b + a$. Efter kravet er dermed

$$\tfrac{7}{2}\cdot(10^m \cdot a + b) = 10b + a \iff 7\cdot 10^m \cdot a + 7b = 20b + 20a \iff 13b = a\cdot(7\cdot 10^m - 2) .$$

Da 13 ikke går op i a, må 13 gå op i $7\cdot 10^m - 2$. Derfor er

$$7\cdot 10^m - 2 \equiv 0 \pmod{13} \iff 7\cdot 10^m \equiv 2 \pmod{13} \iff 10^m \equiv 4 \pmod{13} .$$

Vi finder, at

$$10 \equiv 10 \pmod{13} \;,\; 10^2 \equiv 9 \pmod{13} \;,\; 10^3 \equiv -1 \pmod{13} \;,$$
$$10^4 \equiv 3 \pmod{13} \;,\; 10^5 \equiv 4 \pmod{13} .$$

Dermed er $m = 5$ den mindste værdi. Det er klart, at $a = 1$ er den mindste værdi af a, så

$$13b = 7\cdot 10^5 - 2 = 699\,998 \iff b = 53846.$$

Det søgte tal er altså $n = 153846$. Faktisk er

$$\tfrac{7}{2}\cdot 153846 = 538461 .$$

e.

1. metode

Vi sætter

$$p = \sqrt[3]{60} \quad , \quad q = 2 + \sqrt[3]{7} \ .$$

Lidt snedigt skriver vi

$$p = \sqrt[3]{4 \cdot (7+8)} \ , \ q = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{7} \ .$$

Vi ønsker derfor at afgøre, hvilket af tallene

$$\sqrt[3]{4(x+y)} \quad \text{og} \quad \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} \ ,$$

der er størst.

Vi omformulerer sådan:

$$\sqrt[3]{4(x+y)} > \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} \iff 4(x+y) > x + 3\sqrt[3]{x^2 y} + 3\sqrt[3]{xy^2} + y$$

$$\iff 3(x+y) > 3\sqrt[3]{x^2 y} + 3\sqrt[3]{xy^2} \quad x + y > \sqrt[3]{x^2 y} + \sqrt[3]{xy^2} \ .$$

Vi sætter $x = a^3$ og $b = y^3$, hvor a og b er positive. Uligheden bliver ensbetydende med

$$a^3 + b^3 > \sqrt[3]{a^6 b^3} + \sqrt[3]{a^3 b^6} \iff a^3 + b^3 > a^2 b + ab^2 \iff a^3 + b^3 > ab(a+b)$$

$$\iff a^3 + b^3 - ab(a+b) > 0 \iff (a+b)(a-b)^2 > 0 \ ,$$

hvilket er sandt. Dermed er

$$\sqrt[3]{60} > 2 + \sqrt[3]{7} \ .$$

I øvrigt giver regnemaskinen, at

$$\sqrt[3]{60} = 3{,}914868 \ , \ 2 + \sqrt[3]{7} = 3{,}912931 \ .$$

Forskellen er ca. 0,0019 eller $\frac{1}{500}$.

2. metode

Vi benytter følgende ulighed for positive tal:

$$4(a^3 + b^3) \geq (a+b)^3 \ .$$

Den er nemlig ensbetydende med

$$4a^3 + 4b^3 \geq a^3 + 3a^3 b + 3ab^2 + b^3 \iff a^3 - a^2 b - ab^2 + b^3 \geq 0$$

$$\iff a^3 + b^3 \geq ab(a+b) \ ,$$

som efter 1. metode er sand. Vi får så

$$60 = 4 \cdot (8+7) = 4 \cdot \left(2^3 + \sqrt[3]{7}^3\right) \geq \left(2 + \sqrt[3]{7}\right)^3 \ ,$$

hvoraf

$$\sqrt[3]{60} \geq 2 + \sqrt[3]{7} \ .$$

3. metode

Ved at opløfte til 3. potens fås

$$\sqrt[3]{60} > 2 + \sqrt[3]{7} \iff 60 > 8 + 3 \cdot 4 \cdot \sqrt[3]{7} + 3 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{7}^2 + 7$$

$$\Leftrightarrow \quad 45 > 12\sqrt[3]{7} + 6\sqrt[3]{7}^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt[3]{7}^2 + 4\sqrt[3]{7} - 15 < 0 \ .$$

Ligningen

$$2x^2 + 4x - 15 = 0$$

har rødderne

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{34} - 1 \quad \text{og} \quad -\tfrac{1}{2}\sqrt{34} - 1 \ .$$

Altså har vi

$$2x^2 + 4x - 15 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\tfrac{1}{2}\sqrt{34} - 1 < x < \tfrac{1}{2}\sqrt{34} - 1 \ .$$

Vi undersøger, om $\sqrt[3]{7}$ passer i denne ulighed, dvs. i den højre ulighed. Vi får

$$\sqrt[3]{7} < \tfrac{1}{2}\sqrt{34} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt[3]{7} < \sqrt{34} - 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(2\sqrt[3]{7}\right)^3 < 34\sqrt{34} - 3\cdot 34\cdot 2 + 3\cdot\sqrt{34}\cdot 2 + 3\cdot\sqrt{34}\cdot 4 - 8$$

$$\Leftrightarrow \quad 56 < 46\sqrt{34} - 204 - 8 \quad \Leftrightarrow \quad 268 < 46\sqrt{34}$$

$$\Leftrightarrow \quad 134 < 23\sqrt{34} \quad \Leftrightarrow \quad 134^2 < 23^2\cdot 34$$

$$\Leftrightarrow \quad 67\cdot 134 < 17\cdot 529 \quad \Leftrightarrow \quad 8978 < 8993 \ .$$

Dette er sandt, så den oprindelige ulighed er også sand, dvs.

$$\sqrt[3]{60} > 2 + \sqrt[3]{7} \ .$$

Besvarelser modtaget fra:
Jens-Søren Andersen, Johs. Christensen, Walther Janous, Hans Mortensen, Asger Olesen, Jørgen Olesen, Palle Bak Petersen, Eskil Wadsholt, Con Amore Problemgruppe.