Svar på opgave 350 (Maj 2018)

Opgave:

Lad a og b være positive reelle tal og $a < b$.

Løs ligningen: $\operatorname{int}\frac{a}{x+b}+\operatorname{int}\frac{x+b}{a}=1$.

Besvarelse:

1. metode

Vi deler op i tilfælde.

I. $x \geq 2a - b$. Her er $x + b \geq 2a$, så

$$0<\frac{a}{x+b}\leq\frac{1}{2} \quad \text{og} \quad \frac{x+b}{a}\geq 2 .$$

Altså er

$$\operatorname{int}\frac{a}{x+b}+\operatorname{int}\frac{x+b}{a}\geq 0+2=2.$$

II. $a - b < x < 2a - b$. Så er $a < x + b < 2a$, så

$$\frac{1}{2}<\frac{a}{x+b}<1 \quad \text{og} \quad 1<\frac{x+b}{a}<2 .$$

Idet $x + b > 0$ er dermed

$$\operatorname{int}\frac{a}{x+b}+\operatorname{int}\frac{x+b}{a}=0+1=1.$$

III. $x = a - b$. Her er

$$\frac{a}{x+b}=1 \quad \text{og} \quad \frac{x+b}{a}=1 ,$$

hvoraf

$$\operatorname{int}\frac{a}{x+b}+\operatorname{int}\frac{x+b}{a}=2.$$

IV. $\frac{1}{2}a-b<x<a-b.$ Så er

$$\tfrac{1}{2}a<x+b<a ,$$

hvoraf

$$1<\frac{a}{x+b}<2 \quad \text{og} \quad \frac{1}{2}<\frac{x+b}{a}<1 ,$$

så at

$$\operatorname{int}\frac{a}{x+b}+\operatorname{int}\frac{x+b}{a}=1+0=1.$$

V. $-b<x\le\frac{1}{2}a-b$. Here er

$$0 < x + b \le \tfrac{1}{2}a$$

hvoraf

$$\frac{a}{x+b}\ge 2 \;\text{ og }\; 0<\frac{x+b}{a}\le\frac{1}{2} ,$$

så at

$$\operatorname{int}\frac{a}{x+b}+\operatorname{int}\frac{x+b}{a}\ge 2+0=2 .$$

VI. $x < -b$. Så er $x + b < 0$, hvoraf

$$\frac{a}{x+b}<0 \;\text{ og }\; \frac{x+b}{a}<0 ,$$

så vi har

$$\operatorname{int}\frac{a}{x+b}+\operatorname{int}\frac{x+b}{a}\le -1+(-1)=-2 .$$

Den givne ligning har altså løsningerne

$$]\tfrac{1}{2}a-b;2a-b[\setminus\{a-b\} .$$

Således har ligningen

$$\operatorname{int}\frac{22}{x+15}+\operatorname{int}\frac{x+15}{22}=1$$

hvor $(a,b) = (22,15)$, løsningerne

$$]-4;29[\setminus\{7\} .$$

2. metode (efter Con Amore Problemgruppe)

Vi sætter

$$\operatorname{int}\frac{a}{x+b}=n , \tag{1}$$

så den givne ligning er opfyldt netop hvis

$$\operatorname{int}\frac{x+b}{a}=1-n . \tag{2}$$

Nu er (1) ensbetydende med

$$n\le\frac{a}{x+b}<n+1 , \tag{3}$$

og (2) er ensbetydende med

$$1-n\le\frac{x+b}{a}<2-n . \tag{4}$$

Vi deler op i tilfælde.

$\boldsymbol{n \ge 2}$**.** Her er $n > 0$ og $n + 1 > 0$, og af (3) følger (da $a > 0$), at

$$x + b > 0 .$$

Desuden er $1 - n < 0$ og $2 - n \leq 0$ og derfor følger af (4) (da $a > 0$), at

$$x + b < 0 .$$

Dermed er tilfældet $n \geq 2$ udelukket.

***n* ≤-1.** Da $n < 0$ og $n + 1 \leq 0$ får vi af (3) (da $a > 0$), at

$$x + b < 0 .$$

Desuden er $1 - n \geq 0$ og $2 - n > 0$ får vi af (4) (da $a > 0$), at

$$x + b > 0 .$$

Altså er tilfældet $n \leq -1$ udelukket.

Tilbage er nu kun tilfældene $n = 1$ og $n = 0$, som vi ser på hver for sig.

***n* = 1.** Her får vi af (3) og (4):

$$1 \leq \frac{a}{x+b} < 2 \quad \text{og} \quad 0 \leq \frac{x+b}{a} < 1 \ .$$

Da $a > 0$ følger at $x + b > 0$, så disse uligheder er ensbetydende med

$$x + b \leq a < 2x + 2b \quad \text{og} \quad 0 \leq x + b < a \ ,$$

hvoraf (da $x \neq -b$)

$$\tfrac{1}{2}a - b < x \leq a - b \quad \text{og} \quad -b < x < a - b \ .$$

Disse to uligheder er begge opfyldt netop hvis

$$\tfrac{1}{2}a - b < x < a - b \ . \tag{5}$$

***n* = 0.** Ulighederne (3) og (4) får udseendet

$$0 \leq \frac{a}{x+b} < 1 \quad \text{og} \quad 1 \leq \frac{x+b}{a} < 2 \ .$$

Da $a > 0$ fås, at $x + b > 0$ så ulighederne bliver til

$$0 < a < x + b \quad \text{og} \quad a \leq x + b < 2a \ ,$$

hvoraf

$$x > a - b \quad \text{og} \quad a - b \leq x < 2a - b \ .$$

Disse to uligheder er opfyldt netop hvis

$$a - b < x < 2a - b \ . \tag{6}$$

Den givne ligning er dermed opfyldt, hvis (5) og (6) er opfyldt, dvs. hvis

$$\tfrac{1}{2}a - b < x < a - b \quad \text{eller} \quad a - b < x < 2a - b \ ,$$

dvs. hvis

$$\tfrac{1}{2}a - b < x < 2a - b \quad \text{og} \quad x \neq a - b \ .$$

3.metode (Walther Janous, Innsbruck)

For $x < -b$ er brøkerne $\frac{a}{x+b}$ og $\frac{x+b}{a}$ negative og derfor er ligningen ikke opfyldt. Vi antager derfor at $x > -b$.

Vi har dermed følgende to tilfælde:

I. $\operatorname{int}\dfrac{a}{x+b}=0 \;\wedge\; \operatorname{int}\dfrac{x+b}{a}=1$, **II.** $\operatorname{int}\dfrac{a}{x+b}=1 \;\wedge\; \operatorname{int}\dfrac{x+b}{a}=0$.

Vi ser på tilfældene efter tur.

I. Her gælder

$$0 \le \frac{a}{x+b} < 1 \;\wedge\; 1 \le \frac{x+b}{a} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad a < x+b \;\wedge\; a \le x+b < 2a$$
$$\Leftrightarrow \quad a-b < x < 2a-b \,.$$

II. Her gælder

$$1 \le \frac{a}{x+b} < 2 \;\wedge\; 0 \le \frac{x+b}{a} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x+b \le a < 2x+2b \;\wedge\; x+b < a$$
$$\Leftrightarrow \; \tfrac{1}{2}a-b \le x < a-b \;\wedge\; x < a-b \;\Leftrightarrow\; \tfrac{1}{2}a-b \le x < a-b \,.$$

Dermed er løsningerne til ligningen

$$\tfrac{1}{2}a-b < x < 2a-b \quad \text{og} \quad x \ne a-b \,.$$

Besvarelser modtaget fra:

- Jens Søren Andersen
- Walther Janous
- Hans Mortensen
- Asger Olesen
- Jørgen Olesen
- Palle Bak Petersen
- Con Amore Problemgruppe