Svar på opgave 345 (December 2017)

Opgave:

a. Findes der reelle tal a, b og c, så hver af ligningerne

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$cx^2 + ax + b = 0$$
$$bx^2 + cx + a = 0$$

har to reelle løsninger?

b. Find alle positive hele talpar (a,b), hvor $a < b$, så

$$x^2 + ax + b \quad \text{og} \quad x^2 + bx + a$$

begge har to **hele** rødder.

Besvarelse:

a. Ja, fx

$$x^2 + x - 3 = 0 \quad , \quad -3x^2 + x + 1 = 0 \quad , \quad x^2 - 3x + 1 = 0 \quad ,$$

dvs. $(a,b,c) = (1,1,-3)$. Diskriminanterne er 13, 13 og 5.

I almindelighed kan vi vælge

$$x^2 + x - k = 0 \quad , \quad -kx^2 + x + 1 = 0 \quad , \quad x^2 - kx + 1 = 0$$

hvor k er et positivt tal. Da diskriminanterne er $1 + 4k$, $1 + 4k$ og $k^2 - 4$, må vi forudsætte, at $k > 2$.

En indsender nævner, at hvis $(a,b,c) = (1,k,-k-1)$ for $k = 2, 3,\ldots$ er kravet opfyldt. Vi ser nemlig, at

$$x^2 + kx - k - 1 = 0 \text{ har diskriminanten } k^2 + 4k + 4 = (k + 2)^2 > 0$$
$$(-k - 1)x^2 + x + k = 0 \text{ har diskriminanten } 1 - 4k(-k - 1) = 4k^2 + 4k + 1 > 0$$
$$kx^2 + (-k - 1)x + 1 = 0 \text{ har diskriminanten } (-k - 1)^2 - 4k = k^2 - 2k + 1 > 0 .$$

b.

1. metode.

Lad de hele tal p, q, m og n opfylde det givne, så

$$x^2 + ax + b = (x + p)(x + q) \quad \text{og} \quad x^2 + bx + a = (x + m)(x + n) \quad .$$

Så er

$$p + q = a = mn \quad \text{og} \quad pq = b = m + n \; . \tag{1}$$

Da a er positiv, har m og n samme fortegn, og da $b = m + n$, er både m og n positive. Det samme gælder p og q. Desuden kan vi antage, at $m \leq n$ og $p \leq q$.

Da $a < b$, er

$$mn < m + n \quad ,$$

som er ensbetydende med

$$(m - 1)(n - 1) < 1 \ .$$

Heraf følger, at $m = 1$, så $n = a$ og $b = n + 1 = a + 1$. Dermed er

$$pq = b = a + 1 = p + q + 1 \ .$$

Dette fører til

$$pq = p + q + 1 \quad \Leftrightarrow \quad (p - 1)(q - 1) = 2 \ .$$

Da $0 < p \leq q$, har denne ligning kun løsningen $(p,q) = (2,3)$, hvilket medfører

$$a = p + q = 5 \quad , \quad b = a + 1 = 6 \ .$$

Dermed er de to polynomier

$$x^2 + 5x + 6 \quad \text{og} \quad x^2 + 6x + 5$$

med rødderne henholdsvis

$$x = -2 \ , x = -3 \quad \text{og} \quad x = -1 \ , x = -5 \ .$$

2. metode.
Vi ser først på ligningen

$$x^2 + bx + a = 0$$

med diskriminanten

$$d = b^2 - 4a \ .$$

Da rødderne er hele, er d et kvadrattal. Da $4a$ er lige har kvadrattallene b^2 og d samme paritet. Altså er

$$d \leq (b - 2)^2 \ ,$$

hvoraf

$$b^2 - 4a \leq (b - 2)^2 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 - 4a \leq b^2 - 4b + 4 \quad \Leftrightarrow \quad a \geq b - 1 \ .$$

Det er givet, at $a < b$, dvs. $a \leq b - 1$. Dermed er $a = b - 1$.

Ligningen

$$x^2 + bx + b - 1 = 0$$

har løsningerne $x = -1$ og $x = 1 - b$.

Derefter ser vi på ligningen

$$x^2 + ax + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + (b - 1)x + b = 0 \ .$$

Diskriminanten er

$$D = (b - 1)^2 - 4b = (b - 3)^2 - 8 \ ,$$

og D er et kvadrattal. De eneste to kvadrattal med en forskel på -8 er 1 og 9, så

$$(b - 3)^2 = 9 \ .$$

Da $b \neq 0$, er $b = 6$. Så er $a = 5$ og de to ligninger er

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \quad \text{og} \quad x^2 + 6x + 5 = 0 \ .$$