Svar på opgave 341 (August 2017)

Opgave:

Bestem alle ikke-hele tal x, så

$$x+\frac{13}{x}=\operatorname{int}x+\frac{13}{\operatorname{int}x}\ .$$

Besvarelse:

1. metode

Vi sætter $x = m + a$, hvor $m = \operatorname{int}x$ og $0 < a < 1$. Vi kan antage, at $m \neq 0$ og får omskrivningerne

$$m+a+\frac{13}{m+a}=m+\frac{13}{m} \iff a+\frac{13}{m+a}=\frac{13}{m} \iff am(m+a)+13m=13(m+a)$$

$$\iff am^2 + a^2m + 13m = 13m + 13a \iff m^2 + am = 13 \iff m(m + a) = 13\ . \quad (1)$$

Hvis $m \geq 4$, er $m(m + a) \geq 4\cdot 4 = 16$, hvilket er i strid med (1).
Hvis $m = 1, 2, 3$ er

$$m(m + a) < m(m + 1) \leq 12\ ,$$

så heller ikke disse værdier af m er løsninger.

Hvis $m = -5, -6, -7,\ldots$ er

$$m = -5\ :\ m(m + a) = -5\cdot(-5 + a) = 25 - 5a > 20$$
$$m = -6\ :\ m(m + a) = -6\cdot(-6 + a) = 36 - 6a > 20$$
$$\cdots$$

så heller ikke her finder vi løsninger.
Hvis $m = -1, -2, -3$ er

$$m = -1\ :\ m(m + a) = -1\cdot(-1 + a) = 1 - a < 9$$
$$m = -2\ :\ m(m + a) = -2\cdot(-2 + a) = 4 - 2a < 9$$
$$m = -3\ :\ m(m + a) = -3\cdot(-3 + a) = 9 - 3a < 9\ ,$$

dvs. ingen løsninger her.
Altså er $m = -4$ den eneste mulighed, som giver

$$-4\cdot(-4+a) = 13 \iff 16 - 4a = 13 \iff a = \tfrac{3}{4}\ .$$

Dermed er

$$x = m + a = -4 + \tfrac{3}{4} = -\tfrac{13}{4}$$

Enestre mulige løsning. Indsættelse i ligningen giver

$$x+\frac{13}{x}=-\frac{13}{4}+\frac{13}{-\frac{13}{4}}=-\frac{13}{4}-4 \quad \text{og} \quad \operatorname{int}x+\frac{13}{\operatorname{int}x}=-4+\frac{13}{-4}\ .$$

Dermed er ligningens eneste løsning $x = -\frac{13}{4}$.

2. metode

Vi omskriver sådan:

$$x + \frac{13}{x} = \operatorname{int} x + \frac{13}{\operatorname{int} x} \quad \Leftrightarrow \quad x - \operatorname{int} x = \frac{13}{\operatorname{int} x} - \frac{13}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad x - \operatorname{int} x = \frac{13(x - \operatorname{int} x)}{x \cdot \operatorname{int} x} \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot \operatorname{int} x = 13 .$$

Nu er funktionen $f(x) = x \cdot \operatorname{int} x$ voksende for $x \geq 0$. Vi ser på de enkelte heltalsinter- valler:

$0 \leq x < 1 \;:\; x \cdot \operatorname{int} x = 0$
$1 \leq x < 2 \;:\; x \cdot \operatorname{int} x = x$ og $1 \leq x < 2$
$2 \leq x < 3 \;:\; x \cdot \operatorname{int} x = 2x$ og $4 \leq 2x < 6$
$3 \leq x < 4 \;:\; x \cdot \operatorname{int} x = 3x$ og $9 \leq 3x < 12$
$4 \leq x < 5 \;:\; x \cdot \operatorname{int} x = 4x$ og $16 \leq 4x < 20$.

Altså findes ingen løsninger til ligningen for $x \geq 0$.
Lad derefter $x < 0$. Her er $f(x)$ aftagende og vi får

$-1 \leq x < 0 \;:\; x \cdot \operatorname{int} x = -x$ og $0 \leq -x < 1$
$-2 \leq x < -1 \;:\; x \cdot \operatorname{int} x = -2x$ og $2 \leq -2x < 4$
$-3 \leq x < -2 \;:\; x \cdot \operatorname{int} x = -3x$ og $6 \leq -3x < 9$
$-4 \leq x < -3 \;:\; x \cdot \operatorname{int} x = -4x$ og $12 \leq -4x < 16$.

En mulig løsning ligger altså i intervallet [-4;-3[. Vi får, at

$$x \cdot \operatorname{int} x = 13 \quad \Leftrightarrow \quad -4x = 13 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\tfrac{13}{4} \;.$$

Indsættelse i ligningen giver

$$-\tfrac{13}{4} \cdot \operatorname{int}\left(-\tfrac{13}{4}\right) = -\tfrac{13}{4} \cdot (-4) = 13 .$$

Generalisation.

Walther Janous, Innsbruck anfører følgende generalisation, hvor tallet n fremstilles som sum af et kvadrattal og en rest:

For naturlige tal $n = N^2 + k$, hvor $0 \leq k \leq 2N$, gælder, at ligningen

$$x + \frac{N^2 + k}{x} = \operatorname{int} x + \frac{N^2 + k}{\operatorname{int} x}$$

har præcis en løsning x, der ikke er hel, når $k \neq 0$ og $k \neq N$. Løsningen er
for $1 \leq k \leq N - 1$:

$$x = N + \frac{k}{N} \;;$$

for $N + 1 \leq k \leq 2N$:

$$x = -\frac{k+1}{N+1} - N + 1 .$$

Eksempel

For $n = 13$ er $n = 3^2 + 4$, så $N = 3$ og $k = 4$. Altså er uligheden

$$N + 1 \le k \le 2N \quad \Leftrightarrow \quad 4 \le 4 \le 6$$

opfyldt, så ligningen

$$x + \frac{13}{x} = \operatorname{int} x + \frac{13}{\operatorname{int} x}$$

har løsningen

$$x = -\frac{4+1}{3+1} - 3 + 1 = -\frac{13}{4}\ .$$

Eksempel

For $n = 28$ er $n = 5^2 + 3$, så $N = 5$ og $k = 3$. Uligheden

$$1 \le k \le N - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \le 3 \le 4$$

er opfyldt, så ligningen

$$x + \frac{28}{x} = \operatorname{int} x + \frac{28}{\operatorname{int} x}$$

har løsningen

$$x = N + \frac{k}{N} = 5 + \frac{3}{5} = \frac{28}{5}\ .$$