Svar på opgave 340 (Maj 2017)

Opgave:

a. Bestem alle positive hele tal n, så

$$n^4 - 4n^3 + 22n^2 - 36n + 18$$

er et kvadrattal.

b. Bestem alle hele tal n, så

$$n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 3n + 31$$

er et kvadrattal.

Besvarelse:

a. Vi har, at

$$k = n^4 - 4n^3 + 22n^2 - 36n + 18 = (n^2 - 2n)^2 + 18(n^2 - 2n) + 18 \ .$$

Vi sætter

$$x = n^2 - 2n \quad , \quad k = y^2 \ ,$$

og får

$$x^2 + 18x + 18 = y^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x + 9)^2 - 63 = y^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x + 9 - y)(x + 9 + y) = 63 \ .$$

Vi får følgende mulige ligningssystemer:

$$\begin{matrix} x + 9 - y = 1 & \qquad x + 9 - y = 3 & \qquad x + 9 - y = 7 \\ x + 9 + y = 63 & \qquad x + 9 + y = 21 & \qquad x + 9 + y = 9 \end{matrix} \quad .$$

Heraf fås

$$(x,y) \ : \ (23,31) \ , (3,9) \ , (-1,1) \ .$$

Kun for $x = 3$ og $x = -1$ har ligningerne

$$n^2 - 2n = 3 \quad \text{og} \quad n^2 - 2n = -1$$

positive hele løsninger, nemlig $n = 3$ og $n = 1$. For disse værdier af n fås $k = 1$ og $k = 9^2$.

b. Vi sætter

$$y = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 3n + 31 = (n^2 + 3n + 1)^2 - 3(n - 10) \ .$$

Vi deler op i tilfælde efter værdien af n.

I. Hvis $n > 10$ er

$$y < (n^2 + 3n + 1)^2 \quad \text{eller} \quad y \le (n^2 + 3n)^2 \ ,$$

hvoraf

$$(n^2 + 3n + 1)^2 - 3(n - 10) \leq (n^2 + 3n)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (n^2 + 3n + 1)^2 - (n^2 + 3n)^2 \leq 3n - 30$$

$$\Leftrightarrow \quad (n^2 + 3n + 1 + n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 1 - n^2 - 3n) \leq 3n - 30$$

$$\Leftrightarrow \quad 2n^2 + 6n + 1 \leq 3n - 30 \quad \Leftrightarrow \quad 2n^2 + 3n + 31 \leq 0 \ ,$$

hvilket ikke er opfyldt for nogen reel værdi af n.

II. Hvis $n = 10$ er

$$y = (10^2 + 30 + 1)^2 = 131^2 \ ,$$

hvilket er et kvadrattal.

III. Hvis $n < 10$ er

$$y > (n^2 + 3n + 1)^2 = (n(n + 3) + 1)^2 \ .$$

IIIa. $n \leq -3$ eller $0 \leq n < 10$.

Her er

$$n^2 + 3n = n(n + 3) \geq 0$$

så

$$y \geq (n^2 + 3n + 2)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 3n + 31 \geq n^4 + 9n^2 + 4 + 6n^3 + 12n + 4n^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 11n^2 + 3n + 31 \geq 13n^2 + 12n + 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2n^2 + 9n - 27 \leq 0 \ .$$

Rødderne i dette andengradspolynomium er

$$n = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 8 \cdot 27}}{4} = \frac{-9 \pm 3\sqrt{33}}{4} = \begin{cases} -6{,}558 \\ 2{,}058 \end{cases} .$$

Uligheden er altså opfyldt for

$$-6.558 \leq n \leq 2.058 \ ,$$

så n har de mulige værdier -6, -5, -4, -3, 0, 1, 2. Disse værdier af n giver

$$y \ : \ 409, 166, 67, 40, 31, 52, 145,$$

hvoraf ingen er kvadrattal.

IIIb. $n = -2$ eller $n = -1$.

Her bliver $y = 37$ eller $y = 34$, som ikke er kvadrattal.

Den eneste løsning til opgaven er altså $n = 10$.