Svar på opgave 339 (April 2017)

Opgave:

a. Tallene a, b og c er positive og $a + b + c = 1$. Vis, at

$$\frac{a^3}{a^2+a+1}+\frac{b^3}{b^2+b+1}+\frac{c^3}{c^2+c+1}\geq\frac{1}{13}\,.$$

b. Tallene a, b og c er positive og $a + b + c = 3$. Vis, at

$$(3-2a)(3-2b)(3-2c)\leq a^2b^2c^2\,.$$

Besvarelse: *ny version 15/6-2017*

a. Vi ser på funktionen

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2+x+1}\,.$$

De afledede er

$$f'(x)=\frac{x^4+2x^3+3x^2}{(x^2+x+1)^2}\quad\text{og}\quad f''(x)=\frac{6x(x+1)}{(x^2+x+1)^3}\,.$$

For $x > 0$ er $f''(x) > 0$, so $f(x)$ er konveks. Efter Jensens ulighed er

$$\frac{a^3}{a^2+a+1}+\frac{b^3}{b^2+b+1}+\frac{c^3}{c^2+c+1}=3\cdot\left(\tfrac{1}{3}f(a)+\tfrac{1}{3}f(b)+\tfrac{1}{3}f(c)\right)$$

$$\geq 3\cdot f\left(\tfrac{a+b+c}{3}\right)=3\cdot f\left(\tfrac{1}{3}\right)=3\cdot\frac{(\frac{1}{3})^3}{(\frac{1}{3})^2+\frac{1}{3}+1}=3\cdot\frac{\frac{1}{27}}{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+1}=\frac{1}{13}\,.$$

b. Vi antager, at $a\leq b\leq c$ og sætter

$$x=3-2a\ ,\ y=3-2b\ ,\ z=3-2c\,.$$

Vi ser, at

$$x+y+z=9-2(a+b+c)=3$$

og at

$$y+z=6-2(b+c)=6-2(3-a)=2a\ ,\ x+z=2b\ ,\ x+y=2c\,.$$

Nu er

$$(3-2a)(3-2b)(3-2c)\leq a^2b^2c^2\quad\Leftrightarrow\quad xyz\leq\tfrac{1}{4}(y+z)^2\cdot\tfrac{1}{4}(x+z)^2\cdot\tfrac{1}{4}(x+y)^2$$

$$\Leftrightarrow\quad 64xyz\leq(y+z)^2(x+z)^2(x+y)^2\ ,$$

og det er denne ulighed, vi skal vise.

Vi kan forudsætte, at x, y og z er ikke-negative. I almindelighed gælder for reelle tal p, q og r, at

$$p^2+q^2+r^2\geq pq+qr+pr\,,$$

så vi får

$$(xy + xz + yz)^2 = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + 2xyz(x + y + z)$$

$$\geq xy \cdot xz + xy \cdot yz + xz \cdot yz + 2xyz(x + y + z) = xyz(x + y + z) + 2xyz(x + y + z)\ ,$$

hvoraf

$$(xy + xz + yz)^2 \geq 3xyz(x + y + z) = 9xyz\ . \tag{1}$$

Dernæst omformer vi følgende ulighed

$$9(x + y)(x + z)(y + z) \geq 8(x + y + z)(xy + xz + yz) \tag{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2y + xy^2 + xz^2 + x^2z + yz^2 + y^2z - 6xyz \geq 0\ . \tag{3}$$

Nu er i almindelighed $p^2 + q^2 \geq 2pq$, så

$$\left(y\sqrt{x}\right)^2 + \left(z\sqrt{x}\right)^2 = xy^2 + xz^2 \geq 2xyz$$

$$\left(x\sqrt{y}\right)^2 + \left(z\sqrt{y}\right)^2 = x^2y + z^2y \geq 2xyz$$

$$\left(x\sqrt{z}\right)^2 + \left(y\sqrt{z}\right)^2 = x^2z + y^2z \geq 2xyz\ .$$

Addition af disse tre uligheder giver, at (3) er sand. Af (2) får vi ved hjælp af (1):

$$81(x + y)^2(x + z)^2(y + z)^2 \geq 64(x + y + z)^2(xy + xz + yz)^2$$

$$\geq 64(x + y + z)^2 \cdot 9xyz = 64 \cdot 81xyz\ ,$$

hvoraf

$$(y + z)^2(x + z)^2(x + y)^2 \geq 64xyz\ ,$$

hvilket er den ønskede ulighed.