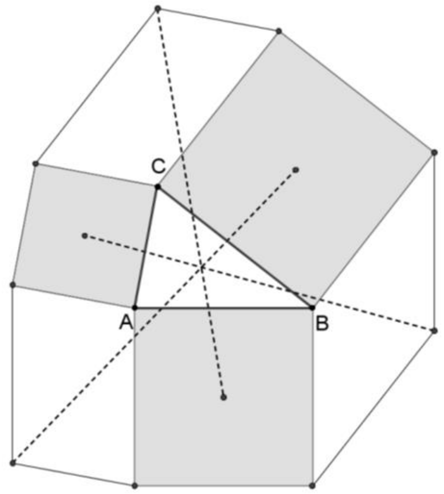
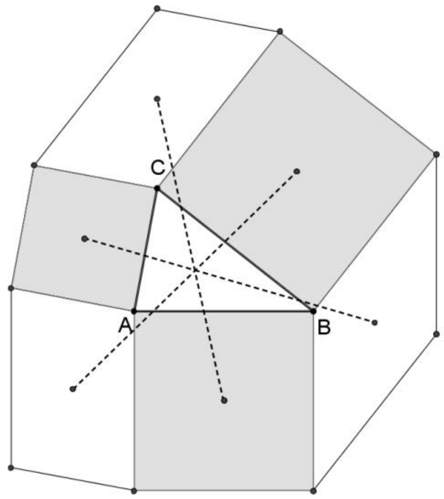
Svar på opgave 337 (Februar 2017)

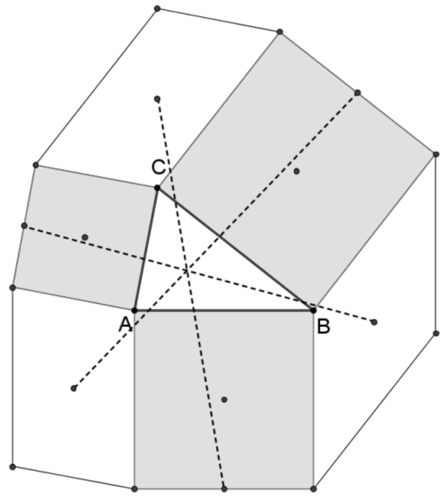
ny version d. 21/3-2017

I nedenstående besvarelse er der problemer med manglende ^ (hat) over visse vektorer.
Evt. papirkopi kan rekvireres hos Jens Carstensen.

Opgave:







I ΔABC afsættes kvadrater udad på hver side. I vinkelrummene mellem kvadraterne tegnes parallelogrammer som vist.
På den første figur er hvert parallelograms yderste vinkelspids forbundet med midtpunktet af det modstående kvadrat.
På den anden figur er midtpunktet af hvert parallelogram forbundet med midt- punktet af det modstående kvadrat.
På den tredje figur er midtpunktet af hvert parallelogram forbundet med det fjerneste sidemidtpunkt i det modstående kvadrat.
Vis i hvert af de tre tilfælde, at forbindelseslinjerne går gennem samme punkt.

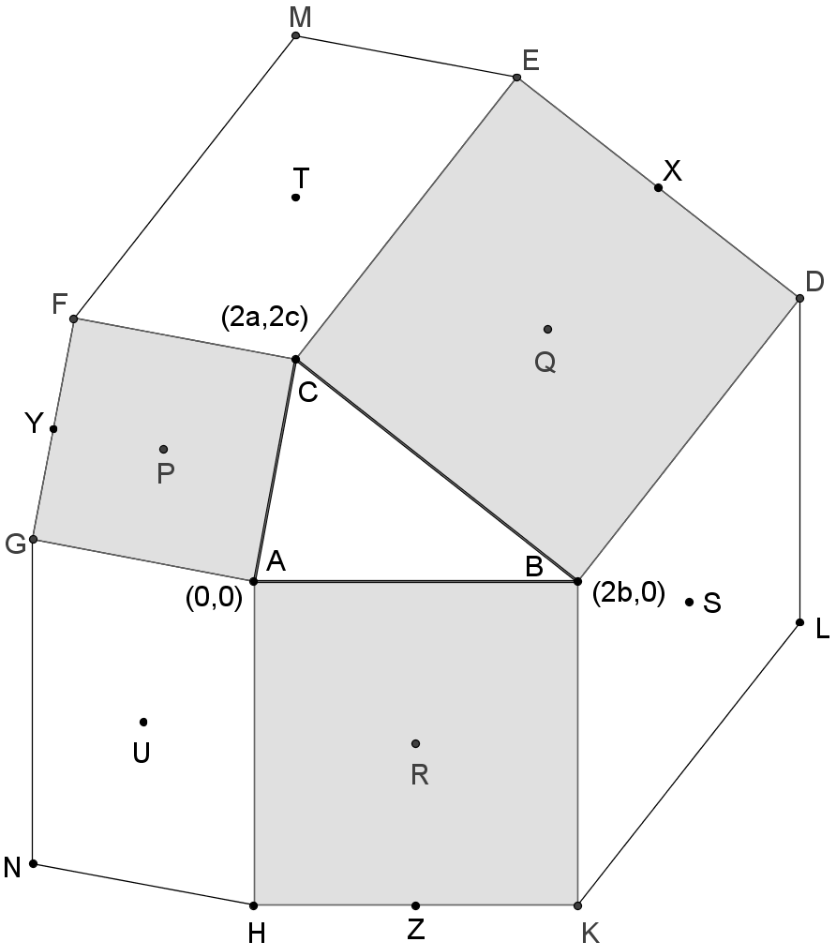
Besvarelse:

1. metode

Vi bruger analytisk geometri og sætter

$$A\,(0{,}0)\ ,\ B\,(2b{,}0)\ ,\ C\,(2a{,}2c)\ .$$

Med betegnelserne på figuren kan vi så let finde koordinaterne neden for.



$D\,(2c + 2b\ ,\ 2b - 2a)$, $E\,(2a + 2c\ ,\ 2c + 2b - 2a)$, $F\,(2a - 2c\ ,\ 2a + 2c)$,

$G\,(-2c\ ,\ 2a)$, $H\,(0\ ,\ -2b)$, $K\,(2b\ ,\ -2b)$, $L\,(2b + 2c\ ,\ -2a)$, $M\,(2a\ ,\ 2c + 2b)$,

$N\,(-2c\ ,\ 2a - 2b)$, $P\,(a - c\ ,\ a + c)$, $Q\,(a + b + c\ ,\ b + c - a)$, $R\,(b\ ,\ -b)$,

$S\,(2b + c\ ,\ -a)$, $T\,(2a\ ,\ 2c + b)$, $U\,(-c\ ,\ a - b)$, $X\,(2c + a + b\ ,\ 2b - 2a + c)$,

$Y\,(a - 2c\ ,\ 2a + c)$, $\mathrm{Z}\,(b\ ,\ -2b)$.

Med disse betegnelser kan man så med et passende matematikprogram bestemme ligninger for de omtalte linjer og eksakt udregne koordinaterne til deres skæringspunkter. Derved konstateres det, at de tre og tre går gennem samme punkt.
Vi demonstrerer alligevel de regninger, der viser, at linjerne *MR*, *LP* og *NQ* går gennem samme punkt. De er i modsætning til, hvad man skulle tro, gennemførlige med håndkraft.
Det 'løbende' punkt *X* på *MR* kan med parameteren *p* fremstilles som

$$\overrightarrow{AX} = (1-p)\overrightarrow{AM} + p\overrightarrow{AR} = (1 - p)\cdot(2a\ ,\ 2c + 2b) + p\cdot(b\ ,\ -b)\ .$$

På NQ er det løbende punkt Y med parameteren q fremstillet ved

$$\overrightarrow{AY} = (1-q)\overrightarrow{AN} + q\overrightarrow{AQ} = (1 - q)\cdot(-2c\ ,\ 2a - 2b) + q\cdot(a + b + c\ ,\ b + c - a)\ ,$$

og endelig er det løbende punkt Z på LP med parameter r fremstillet ved

$$\overrightarrow{AZ} = (1-r)\overrightarrow{AL} + r\overrightarrow{AP} = (1 - r)\cdot(2b + 2c\ ,\ -2a) + r\cdot(a - c\ ,\ a + c)\ .$$

Ved udregning får vi

$$\overrightarrow{AX} = \left(2a-2ap+bp\ ,\ 2c+2b-2cp-3bp\right)\ ,$$

$$\overrightarrow{AY} = \left(-2c+3cq+aq+bq\ ,\ 2a-2b-3aq+3bq+cq\right)\ ,$$

$$\overrightarrow{AZ} = \left(2b+2c+ar-2br-3cr\ ,\ -2a+3ar+cr\right)\ .$$

Vi ønsker at finde parameterværdier p, q og r, så X, Y og Z falder sammen. Koordinaterne til $\overrightarrow{AX}$ og $\overrightarrow{AY}$ skal derfor være ens, så vi får ligningssystemet

$$\begin{gathered} 2a - 2ap + bp = -2c + 3cq + aq + bq \\ 2c + 2b - 2cp - 3bp = 2a - 2b - 3aq + 3bq + cq\ , \end{gathered}$$

der omskrives til

$$\begin{gathered} p(b - 2a) + q(-a - b - 3c) = -2c - 2a \\ p(-3b - 2c) + q(3a - 3b - c) = 2a - 4b - 2c\ . \end{gathered}$$

Ved determinantmetoden og ved at holde tungen lige i munden undervejs, får vi løsningen $(p,q) = \left(\tfrac{2}{3},\tfrac{2}{3}\right)$.

Vi benytter, at de to andenkoordinater for $\overrightarrow{AY}$ og $\overrightarrow{AZ}$ er lige store og får

$$2a - 2b - 3aq + 3bq + cq = -2a + 3ar + cr\ ,$$

og ved indsættelse af $q = \tfrac{2}{3}$ fås $r = \tfrac{2}{3}$. Ved indsættelse af $p = q = r = \tfrac{2}{3}$ i koordinatudtrykkene for $\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AY}$ og $\overrightarrow{AZ}$ fås, at linjerne LP, MR og NQ skærer hinanden i punktet med koordinaterne $\left(\tfrac{2}{3}a+\tfrac{2}{3}b, \tfrac{2}{3}c\right)$. Vi ser, at

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a \\ 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+2b \\ 2c \end{pmatrix},$$

så det fundne skæringspunkt har stedvektoren

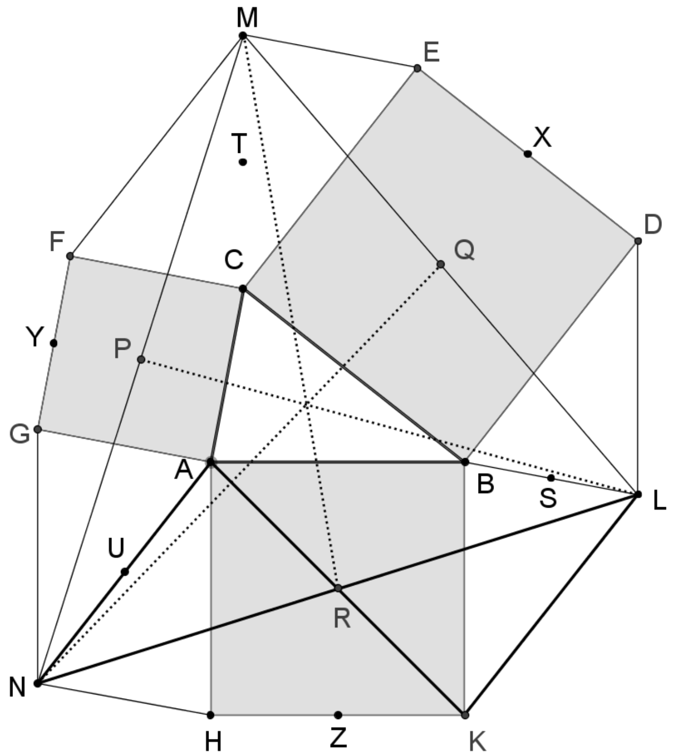
$$\tfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)\ .$$

2. metode

Vi giver dernæst en euklidisk løsning til den første figur. I ΔNAH er $AH = AB = c$ og $NH = AG = AC = b$. Vi har, at $\angle HAG = 180° - A$ og i parallelogrammet □$GAHN$ er så $\angle NHA = A$. Dermed er ΔABC og ΔHAN kongruente.
I ΔBLK er $BK = AB = c$ og $KL = BD = BC = a$. Desuden er $\angle KBD = 180° - B$ så vi parallelogrammet □$BKLD$ får, at $\angle BKL = B$. Altså er ΔABC og ΔBKL kongruente.

Heraf følger, at ΔHAN og ΔBKL er kongruente, så $\angle HAN = \angle BKL.$ Desuden er $AR = RK$ og $\angle HAR = \angle BKA$, så vi får

$$\angle NAR = \angle HAN + \angle HAR = \angle BKL + \angle BKA = \angle RKL.$$



I ΔNAR og ΔLKR har vi fun- det, at

$$\angle NAR = \angle RKL \quad ,$$

$$AR = RK \quad , \quad KL = AN \ .$$

Derfor er ΔNAR og ΔLKR kongruente. Altså er $NR = RL$ og $\angle ARN = \angle KRL$, og da A, R og K ligger på linje gælder det samme for N, R og L. Der- med er MR median i ΔLMN.

Analogt er NQ og LP medianer i ΔLMN. De tre linje går derfor gennem samme punkt.

Når dette resultat er kendt, kan vi selvfølgelig kontrollere ved at benytte koordinatsæt- tene oven for. Medianernes skæringspunkt i ΔABC har koordinaterne

$$\tfrac{1}{3}\big((0,0)+(2b,0)+(2a,2c)\big) = \tfrac{1}{3}(2a+2b,2c)$$

,

og medianernes skæringspunkt i ΔMLN har koordinaterne

$$\tfrac{1}{3}\big((2a,2c+2b)+(2b+2c,-2a)+(-2c,2a-2b)\big) = \tfrac{1}{3}(2a+2b,2c).$$

Vi har altså som yderligere resultat fundet, at medianernes skæringspunkt i ΔABC og i ΔMLN falder sammen.

3. metode

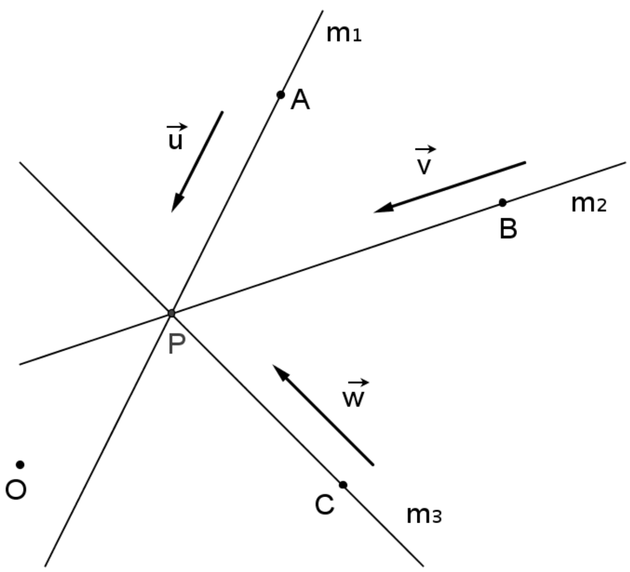
Lad m_1, m_2 og m_3 være rette linjer (ikke to parallelle) med retningsvektorer $\vec{u}, \vec{v}$ og $\vec{w}$ og lad A, B og C være faste punkter på m_1, m_2 og m_3.

Antag, at linjerne går gennem samme punkt P og at koordinatsystemets begyndelsespunkt er O. Så gælder for passende værdier af parametrene r, s og t:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + r\,\vec{u} \quad ,$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + s\,\vec{v} \quad ,$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + t\,\vec{w} \ .$$



Skæringspunktet mellem m_1 og m_2 opfylder

$$\overrightarrow{OA} + r\vec{u} = \overrightarrow{OB} + s\vec{v} \;.$$

Skalær multiplikation med $\hat{v}$ giver

$$\overrightarrow{OA} \cdot \hat{v} + r\vec{u} \cdot \hat{v} = \overrightarrow{OB} \cdot \hat{v} + s\vec{v} \cdot \hat{v}$$

$$\Leftrightarrow \quad r\vec{u} \cdot \hat{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \hat{v}$$

$$\Leftrightarrow \quad r = \frac{\hat{v} \cdot \overrightarrow{AB}}{\hat{v} \cdot \vec{u}} \;.$$

Her er $\hat{v} \cdot \vec{u} \neq 0$ fordi m_1 og m_2 ikke er parallelle. Altså er

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{\hat{v} \cdot \overrightarrow{AB}}{\hat{v} \cdot \vec{u}} \vec{u} \;.$$

Da desuden P ligger på m_3 er

$$\overrightarrow{CP} \cdot w = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC}\right) \cdot w = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\overrightarrow{OA} + \frac{\hat{v} \cdot \overrightarrow{AB}}{\hat{v} \cdot \vec{u}} \vec{u} - \overrightarrow{OC}\right) \cdot w = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{CA} \cdot w + \frac{\hat{v} \cdot \overrightarrow{AB}}{\hat{v} \cdot \vec{u}} \left(\vec{u} \cdot w\right) = 0 \;. \tag{1}$$

Hvis vi antager, at $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{o}$, kan vi forenkle formlen (1), fordi

$$\vec{u} \cdot \hat{v} + \vec{u} \cdot w = \vec{u} \cdot \left(\hat{v} + w\right) = \vec{u} \cdot (-u) = 0 \;.$$

Dette giver at

$$\vec{u} \cdot w = -\vec{u} \cdot \hat{v} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\vec{u} \cdot w}{\vec{u} \cdot \hat{v}} = -1 \,,$$

så betingelsen (1) kan skrives:

$$\overrightarrow{CA} \cdot w = \overrightarrow{AB} \cdot \hat{v} \;. \tag{2}$$

Lad os se på den anden figur, hvor vi skal vise, at linjerne UQ, TR og SP går gennem samme punkt. Vi sætter

$$\vec{a} = \overrightarrow{CB} \;,\; \vec{b} = \overrightarrow{AC} \;,\; \vec{c} = \overrightarrow{BA} \,,$$

så $\vec{b} = -\vec{a} - \vec{c}$. Dermed får vi

$$\overrightarrow{UQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AU} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ} - \overrightarrow{AU} = \vec{b} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CD} - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AN}$$

$$= \vec{b} + \tfrac{1}{2}\left(\vec{a} + a\right) - \tfrac{1}{2}\left(\hat{c} + \vec{b}\right) = -\vec{a} - \vec{c} + \tfrac{1}{2}\vec{a} + \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}\hat{c} - \tfrac{1}{2}\left(-a - \hat{c}\right) \; = -\tfrac{1}{2}\vec{a} + a - \vec{c} \,,$$

$$\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AS} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BS} = \tfrac{1}{2}\left(\vec{b} + \hat{b}\right) - (-\vec{c}) - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BL}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\vec{b} + \hat{b}\right) + \vec{c} - \tfrac{1}{2}\left(a + \hat{c}\right) = -\tfrac{1}{2}\vec{a} + \tfrac{1}{2}\vec{c} - a - \hat{c} \;,$$

$$\overrightarrow{TR} = \overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AT} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CT} = \tfrac{1}{2}\left(\hat{c} - \vec{c}\right) - \vec{b} - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CH}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\hat{c} - \vec{c}\right) - \left(-\vec{a} - \vec{c}\right) - \tfrac{1}{2}\left(a + \hat{b}\right) = \cdots = \vec{a} + \tfrac{1}{2}\vec{c} + \hat{c} \;.$$

Vi finder, at $\overrightarrow{UQ} + \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{TR} = \vec{o}$, og efter (2) går de tre linjer *UQ*, *TR* og *SP* gennem samme punkt hvis

$$TR \cdot \overrightarrow{TQ} = SP \cdot \overrightarrow{QS} \ .$$

Vi får, at

$$\overrightarrow{TQ} = \overrightarrow{CQ} - \overrightarrow{CT} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CD} - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CM} = \tfrac{1}{2}\left(\vec{a} + a\right) - \tfrac{1}{2}\left(a + \hat{b}\right) = \tfrac{1}{2}\vec{a} + \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}\hat{c} \ ,$$

$$\overrightarrow{QS} = \overrightarrow{BS} - \overrightarrow{BQ} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BL} - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BE} = \tfrac{1}{2}\left(\hat{c} + a\right) - \tfrac{1}{2}\left(a - \vec{a}\right) = \tfrac{1}{2}\hat{c} + \tfrac{1}{2}\vec{a} \ .$$

Derefter er

$$TR \cdot \overrightarrow{TQ} = \left(a + \tfrac{1}{2}\hat{c} - \vec{c}\right) \cdot \left(\tfrac{1}{2}\vec{a} + \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}\hat{c}\right) = \tfrac{3}{4}\vec{a} \cdot \hat{c} + \tfrac{1}{4}\vec{a} \cdot \vec{c} + \tfrac{1}{2}\vec{a}^{\,2} + \tfrac{1}{4}\vec{c}^{\,2} \ ,$$

$$SP \cdot \overrightarrow{QS} = \left(-\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}\hat{c} + \vec{a} + \vec{c}\right) \cdot \left(\tfrac{1}{2}\vec{a} + \tfrac{1}{2}\hat{c}\right) = \tfrac{3}{4}\vec{a} \cdot \hat{c} + \tfrac{1}{4}\vec{a} \cdot \vec{c} + \tfrac{1}{2}\vec{a}^{\,2} + \tfrac{1}{4}\vec{c}^{\,2} \ .$$

Dermed er vist, at *UQ*, *TR* og *SP* går gennem samme punkt.

Vi overlader beviset for, at de tre linjer i den sidste figur går gennem samme punkt til de udmattede læsere.