Svar på opgave 335 (December 2016)

Opgave:

a. Lad a, b, c og d være positive tal, så $abcd = 1$. Vis, at

$$\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+cd}{1+c}+\frac{1+da}{1+d} \geq 4\,.$$

b. Vis, at der for positive tal a, b og c gælder

$$\frac{a(3a-b)}{c(a+b)}+\frac{b(3b-c)}{a(b+c)}+\frac{c(3c-a)}{b(c+a)} \leq \frac{a^3+b^3+c^3}{abc}\,.$$

Besvarelse:

a. Idet $cd = \frac{1}{ab}$ og $da = \frac{1}{bc}$ er uligheden ensbetydende med

$$\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+\frac{1}{ab}}{1+c}+\frac{1+\frac{1}{bc}}{1+d} \geq 4$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+ab}{ab+abc}+\frac{1+bc}{bc+bcd} \geq 4$$

$$\Leftrightarrow\quad (1+ab)\cdot\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{ab+abc}\right)+(1+bc)\cdot\left(\frac{1}{1+b}+\frac{1}{bc+bcd}\right) \geq 4\,. \qquad (1)$$

Nu gælder uligheden

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}\,, \qquad (2)$$

fordi den er ensbetydende med

$$y(x+y)+x(x+y) \geq 4xy \quad\Leftrightarrow\quad xy+y^2+x^2+xy \geq 4xy$$

$$\Leftrightarrow\quad x^2+y^2 \geq 2xy \quad\Leftrightarrow\quad (x-y)^2 \geq 0\,.$$

Anvendes uligheden (2) på (1) fås

$$(1+ab)\cdot\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{ab+abc}\right)+(1+bc)\cdot\left(\frac{1}{1+b}+\frac{1}{bc+bcd}\right)$$

$$\geq (1+ab)\cdot\frac{4}{1+a+ab+abc}+(1+bc)\cdot\frac{4}{1+b+bc+bcd}$$

$$\Leftrightarrow\quad (1+ab)\cdot\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{ab+abc}\right)+(1+bc)\cdot\left(\frac{1}{1+b}+\frac{1}{bc+bcd}\right)$$

$$\geq 4\cdot\left(\frac{1+ab}{1+a+ab+abc}+\frac{1+bc}{1+b+bc+bcd}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad (1+ab)\cdot\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{ab+abc}\right)+(1+bc)\cdot\left(\frac{1}{1+b}+\frac{1}{bc+bcd}\right)$$

$$\geq 4\cdot\left(\frac{1+ab}{1+a+ab+abc}+\frac{a+abc}{a+ab+abc+1}\right)=4\cdot\frac{1+ab+a+abc}{1+a+ab+abc}=4.$$

b. Vi omskriver til

$$\frac{a(3a-b)}{c(a+b)}+\frac{b(3b-c)}{a(b+c)}+\frac{c(3c-a)}{b(c+a)} \leq \frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{bc} ,$$

og viser, at ulighedstegnet gælder for hvert par af 'sammenhørende' brøker på venstre og højre side, dvs. vi viser, at

$$\frac{a(3a-b)}{c(a+b)} \leq \frac{a^2}{bc} .$$

Denne ulighed er ensbetydende med

$$\frac{3a-b}{a+b}\leq\frac{a}{b} \quad\Leftrightarrow\quad 3ab-b^2\leq a^2+ab \quad\Leftrightarrow\quad a^2+b^2-2ab\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad (a-b)^2\geq 0 ,$$

hvilket er sandt. Addition af denne ulighed og de to tilsvarende

$$\frac{b(3b-c)}{a(b+c)} \leq \frac{b^2}{ac} \quad \text{og} \quad \frac{c(3c-a)}{b(c+a)} \leq \frac{c^2}{ab}$$

giver det ønskede.