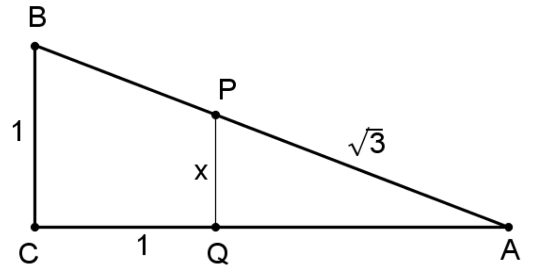
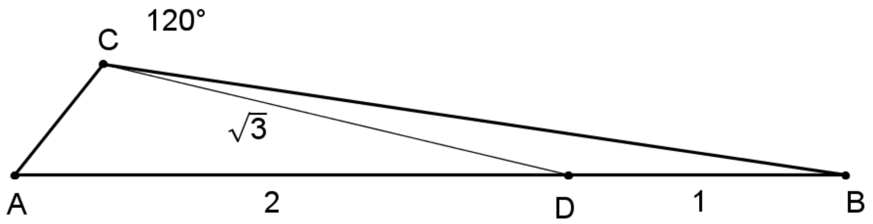
Svar på opgave 334 (November 2016)

Opgave:

a. I den retvinklede ΔABC er $C = 90°$ og $BC = 1$.
Punktet Q ligger på AC, så $CQ = 1$.
Den vinkelrette på CA i Q skærer AB i P, så
$PA = \sqrt{3}$.
Bestem PQ.



b. I ΔABC er $C = 120°$ og punktet D ligger på AB, så $AD = 2$ og $DB = 1$ og $CD = \sqrt{3}$.
Bestem arealet T af ΔABC.



Besvarelse:

a. Vi sætter $PQ = x$. Da $QA = \sqrt{3-x^2}$ og ΔPQA og ΔBCA er ensvinklede, er

$$\frac{\sqrt{3-x^2}}{x} = \frac{1+\sqrt{3-x^2}}{1} \quad \Leftrightarrow \quad x + x\sqrt{3-x^2} = \sqrt{3-x^2} \quad \Leftrightarrow \quad (1-x)\sqrt{3-x^2} = x\ . \qquad (1)$$

Kvadrering giver

$$(3 - x^2)(1 - 2x + x^2) = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - 2x^3 - x^2 + 6x - 3 = 0\ . \qquad (2)$$

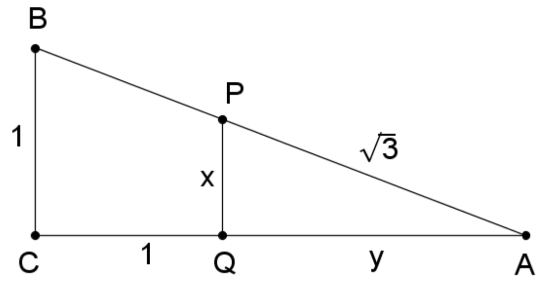
Denne ligning ser jo noget ufremkommelig ud. Regnemaskine giver imidlertid, at $x = 0{,}618034$, som vi (straks!) genkender som $\Phi - 1$, hvor Φ er det gyldne snits forhold. Vi kunne så (lidt træls) kontrollere ved at udregne

$$(\Phi - 1)^4 - 2(\Phi - 1)^3 - (\Phi - 1)^2 + 6(\Phi - 1) - 3$$

og vise, at vi får 0 som resultat. Dette er dog utilfredsstillende og smager af magi. Desuden er regnemaskine jo ikke et tilladt hjælpemiddel!

I stedet sætter vi $QA = y$, så

$$x^2 + y^2 = 3 \,, \qquad (3)$$



og ensvinklede trekanter giver nu ligningen (1) udseendet

$$\frac{y}{x} = \frac{1+y}{1} \quad \Leftrightarrow \quad xy + x = y$$

$$\Leftrightarrow \quad y - x = xy \,.$$

Kvadrering giver

$$x^2 + y^2 - 2xy = (xy)^2 \,,$$

og efter (3) får vi

$$3 - 2xy = (xy)^2 \quad \Leftrightarrow \quad (xy)^2 + 2xy - 3 = 0 \,,$$

og da x og y er positive, giver dette $xy = 1$, så $y = \frac{1}{x}$. Dermed er

$$y - x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{x} - x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) \,.$$

Ligningen (2) kan i øvrigt omskrives sådan:

$$(x^2 + x - 1)(x^2 - 3x + 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) \,.$$

b.

1. metode

Lad P være midtpunkt af AB og lad midtnormalen til AB skære den om- skrevne cirkel i L som vist. Projektionerne af C på OL og AB er F og E.

Vi sætter

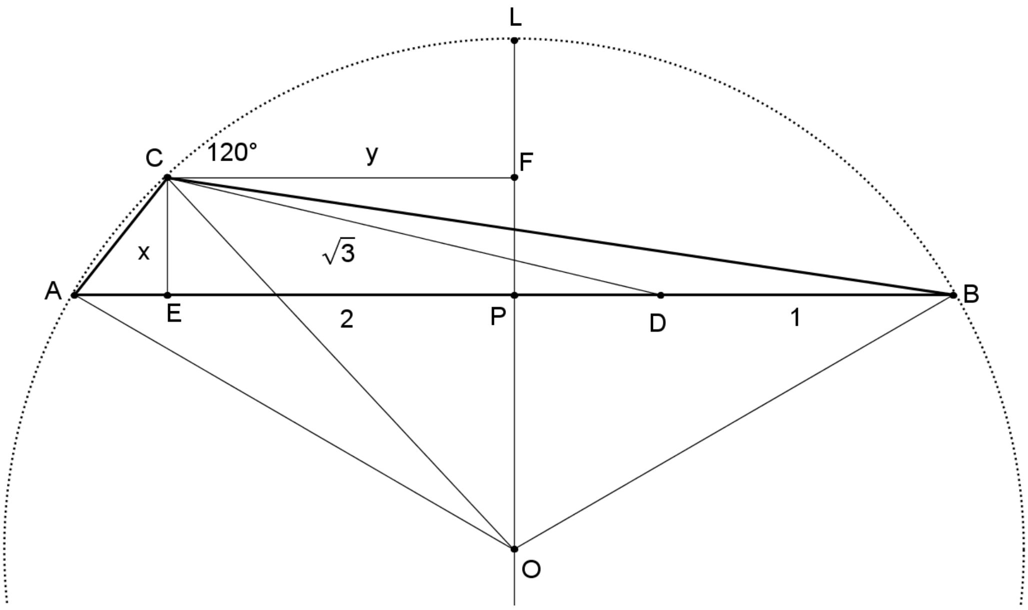
$$CE = FP = x \quad \text{og} \quad CF = EP = y \,.$$

Så er $AP = \frac{3}{2}$ og $PD = \frac{1}{2}$. Da $C = 120°$, er $\angle AOB = 120°$ og $\angle AOP = 60°$.

I den retvinklede ΔAPO er

$$\sin 60° = \frac{AP}{OA} \quad \Leftrightarrow \quad OA = \frac{AP}{\sin 60°} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \,,$$

så $OA = OB = OC = \sqrt{3}$.



I ΔCED er

$$ED^2 + EC^2 = CD^2 \iff \left(y+\tfrac{1}{2}\right)^2 + x^2 = 3 \iff y^2 = 3 - x^2 - y - \tfrac{1}{4}\ , \qquad (4)$$

og i ΔOPB er

$$OP = \sqrt{OB^2 - PB^2} = \sqrt{3 - \tfrac{9}{4}} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

I ΔCOF er

$$(OP + PF)^2 + CF^2 = OC^2 \iff \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} + x\right)^2 + y^2 = 3\ ,$$

og ved hjælp af (4) er dette ensbetydende med

$$\tfrac{3}{4} + x^2 + x\sqrt{3} + 3 - x^2 - y - \tfrac{1}{4} = 3 \iff y = x\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}\ .$$

Dette indsættes i (4):

$$\left(x\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}\right)^2 + x^2 = 3 - x^2 - x\sqrt{3} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}$$

$$\iff 3x^2 + \tfrac{1}{4} + x\sqrt{3} = -x^2 - x\sqrt{3} + \tfrac{9}{4} \iff 4x^2 + 2x\sqrt{3} - 2 = 0$$

$$\iff 2x^2 + x\sqrt{3} - 1 = 0 \iff x = \frac{\sqrt{11} - \sqrt{3}}{4}\ .$$

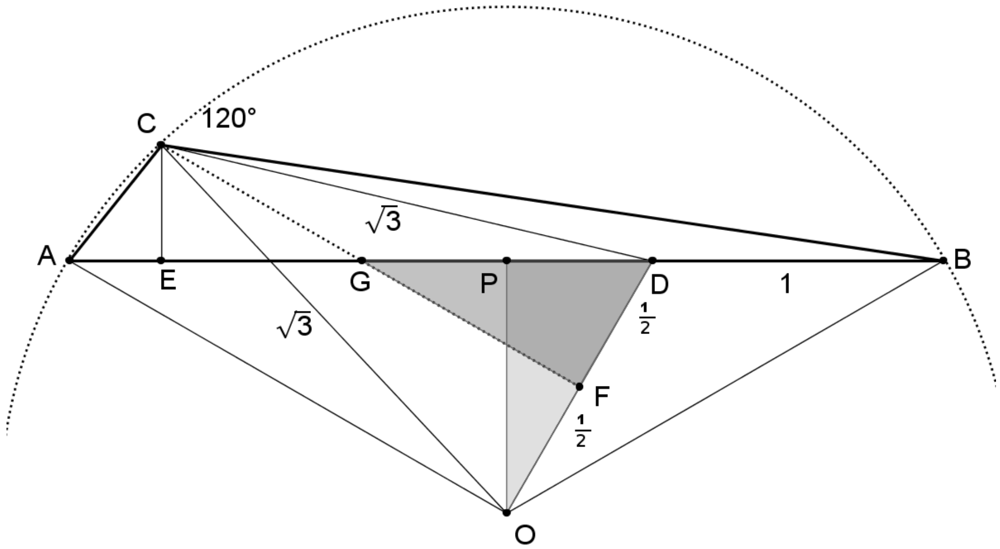
Så er

$$T = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot x = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{11} - \sqrt{3}}{4} = \frac{3}{8}\left(\sqrt{11} - \sqrt{3}\right).$$

2. metode

Som i 1. metode ses, at $\angle AOB = 120°$ og $\angle AOP = 60°$. Så er ΔAPO en 30°-60°-90°-trekant, og da $AB = 3$, er $AP = \tfrac{3}{2}$ og dermed $OP = \tfrac{\sqrt{3}}{2}$ og $OA = \sqrt{3}$. Da OA er radius i cirklen, er $OC = OA = \sqrt{3}$.

Nu er $OC = DC$, så C ligger på midtnormalen for OD, som har fodpunkt i midtpunktet F af OD.



Vi har, at

$$PD = PB - DB = \tfrac{3}{2} - 1 = \tfrac{1}{2} ,$$

og da kateteforholdet $OP : PD$ er $\sqrt{3}$, er ΔOPD en 30°-60°-90°-trekant, så OD = 1 og $OF = FD = \frac{1}{2}$.

Lad CF skære AB i G. Da $\angle POD = \angle FGD$ (vinklerne har ortogonale vinkelben) og $PD = \frac{1}{2}$ og $FD = \frac{1}{2}$, er ΔGFD og ΔOPD kongruente og dermed er $GF = \frac{\sqrt{3}}{2}$. I ΔDCF får vi så

$$FC^2 = DC^2 - DF^2 = 3 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{11}{4} \quad \text{så} \quad FC = \tfrac{\sqrt{11}}{2} .$$

Da $GF = OP = \frac{\sqrt{3}}{2}$, er

$$CG = FC - GF = \frac{\sqrt{11} - \sqrt{3}}{2} .$$

Da ΔCGE er en 30°-60°-90°-trekant, er

$$CE = \frac{1}{2} CG = \frac{\sqrt{11} - \sqrt{3}}{4} ,$$

og dermed

$$T = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CE = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{11} - \sqrt{3}}{4} = \frac{3}{8}\left(\sqrt{11} - \sqrt{3}\right).$$

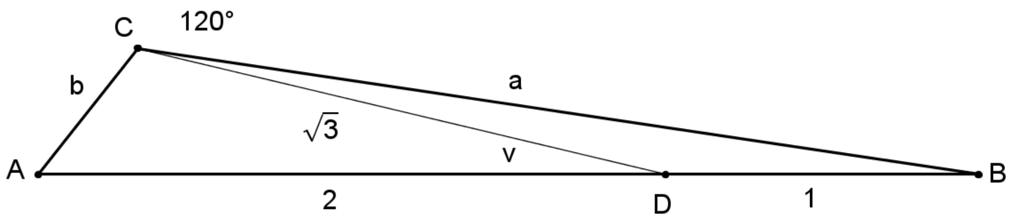
3. metode

Vi sætter $v = \angle ADC$. I ΔABC giver cosinusrelationen

$$9 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 120° \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 + ab = 9 . \tag{5}$$

I ΔADC får vi

$$b^2 = 4 + 3 - 4\sqrt{3} \cdot \cos v \quad \Leftrightarrow \quad b^2 = 7 - 4\sqrt{3} \cdot \cos v . \tag{6}$$



I ΔCDB er $\angle CDB = 180° - v$, så

$$a^2 = 3 + 1 - 2\sqrt{3} \cdot \cos(180° - v) \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = 4 + 2\sqrt{3} \cdot \cos v \ . \tag{7}$$

Arealet T af ΔABC er

$$T = \tfrac{1}{2} ab \cdot \sin 120° = \tfrac{\sqrt{3}}{4} ab \ .$$

Arealerne af ΔACD og ΔBCD er

$$[ACD] = \tfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sin v \quad , \quad [BCD] = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 1 \cdot \sin(180° - v) = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \sin v .$$

Altså er

$$\tfrac{\sqrt{3}}{4} ab = \sqrt{3} \cdot \sin v + \tfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin v \quad \Leftrightarrow \quad ab = 4\sin v + 2\sin v = 6\sin v . \tag{8}$$

Af (6) og (7) fås

$$a^2 b^2 = \left(7 - 4\sqrt{3}\cos v\right) \cdot \left(4 + 2\sqrt{3}\cos v\right) = 28 - 2\sqrt{3}\cos v - 24\cos^2 v \ ,$$

og af (8) fås

$$a^2 b^2 = 36\sin^2 v = 36 - 36\cos^2 v \ ,$$

så

$$28 - 2\sqrt{3}\cos v - 24\cos^2 v = 36 - 36\cos^2 v \quad \Leftrightarrow \quad 6\cos^2 v - \sqrt{3}\cos v - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos v = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{99}}{12} \ .$$

Da $\cos v$ er positiv, er

$$\cos^2 v = \frac{3 + 99 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{99}}{144} = \frac{17 + \sqrt{33}}{24} \ ,$$

og

$$1 - \cos^2 v = 1 - \frac{17 + \sqrt{33}}{24} = \frac{7 - \sqrt{33}}{24} \ .$$

Efter (8) er nu

$$T = \frac{\sqrt{3}}{4} ab = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 6\sin v = \frac{3\sqrt{3}}{2} \sin v = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 v} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\frac{7 - \sqrt{33}}{24}} \ .$$

Vi har, at

$$\left(\sqrt{11} - \sqrt{3}\right)^2 = 14 - 2\sqrt{33} \quad \text{så} \quad 7 - \sqrt{33} = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{11} - \sqrt{3}\right)^2 \ ,$$

og dermed

$$T = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\frac{\left(\sqrt{11} - \sqrt{3}\right)^2}{2 \cdot 24}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{11} - \sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{3}{8}\left(\sqrt{11} - \sqrt{3}\right) .$$

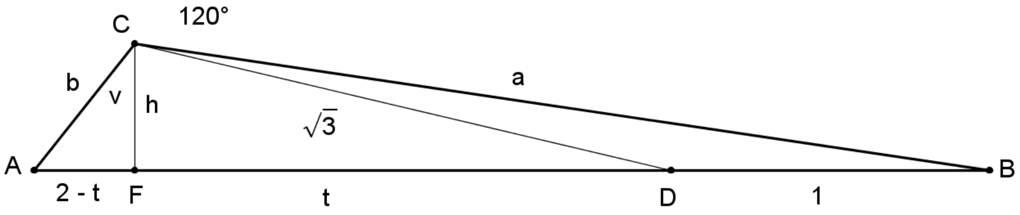
4. metode

Projektionen af C på AB er F. Vi sætter

$$v = \angle ACF \quad , \quad t = FD \quad , \quad h = CF \ ,$$

så $AF = 2 - t$ og $\angle FCB = 120° - v$. I ΔFDC er

$$h^2 + t^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad h = \sqrt{3 - t^2} \ .$$



I ΔAFC og ΔFBC er

$$\tan v = \frac{2-t}{h} \quad \text{og} \quad \tan(120° - v) = \frac{1+t}{h} \ .$$

Så får vi

$$\tan 120° = \tan(v + (120° - v)) = \frac{\tan v + \tan(120° - v)}{1 - \tan v \cdot \tan(120° - v)}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\sqrt{3} = \frac{\frac{2-t}{h} + \frac{1+t}{h}}{1 - \frac{2-t}{h} \cdot \frac{1+t}{h}} \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{3} = \frac{h(2-t+1+t)}{h^2 - (2-t)(1+t)}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\sqrt{3} = \frac{3h}{h^2 - (2-t)(1+t)} \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3-t^2}}{3 - t^2 - 2 - 2t + t + t^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3-t^2}}{1-t} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3}(t-1) = 3\sqrt{3-t^2} \ .$$

Da $t > 1$ er dette ensbetydende med

$$3(t - 1)^2 = 9(3 - t^2) \quad \Leftrightarrow \quad 2t^2 - t - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1+\sqrt{33}}{4} \ .$$

Dermed er

$$t^2 = \frac{34 + 2\sqrt{33}}{16} = \frac{17 + \sqrt{33}}{8} \quad og \quad 3 - t^2 = \frac{7 - \sqrt{33}}{8} \ ,$$

så

$$h = \sqrt{3 - t^2} = \sqrt{\frac{7-\sqrt{33}}{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{7 - \sqrt{33}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}\left(\sqrt{11} - \sqrt{3}\right) \ .$$

Arealet af ΔABC er

$$T = \frac{1}{2} h \cdot 3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{7 - \sqrt{33}} = \frac{3}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{11} - \sqrt{3}\right) = \frac{3}{8}\left(\sqrt{11} - \sqrt{3}\right) .$$