Svar på opgave 331 (August 2016)

Opgave:

Vi har, at

$$3 + 4 + 5 + 6 = 3 \cdot 6 \quad , \quad 15 + 16 + 17 + \cdots + 35 = 15 \cdot 35 \ .$$

Find yderligere tre par af positive hele tal (m,n), så

$$m + (m + 1) + (m + 2) + \cdots + (n - 1) + n = m \cdot n \ .$$

Besvarelse:

1. metode.

Vi har, at

$$m + (m + 1) + (m + 2) + \cdots + (n - 1) + n$$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n - (1 + 2 + \cdots + (m - 1)) = \tfrac{1}{2} n(n+1) - \tfrac{1}{2} m(m-1) \ ,$$

så vi kræver, at

$$\tfrac{1}{2} n(n+1) - \tfrac{1}{2} m(m-1) = m \cdot n$$

$$\Leftrightarrow \quad n^2 + n - m^2 + m = 2mn \quad \Leftrightarrow \quad m^2 + (2n - 1)m - n^2 - n = 0 \ . \qquad (1)$$

Her må diskriminanten være kvadratet på et helt tal, dvs.

$$(2n - 1)^2 - 4(-n^2 - n) = k^2 \quad \Leftrightarrow \quad 8n^2 + 1 = k^2 \ .$$

De første værdier af n, for hvilke $8n^2 + 1$ er et kvadrattal ses i tabellen:

n	1	6	35	204	1189	6930
k	3	17	99	577	3363	19601

Læg mærke til, at tallene i tabellen kan findes rekursivt, idet

$$35 = 6 \cdot 6 - 1 \quad , \quad 204 = 6 \cdot 35 - 6 \quad , \quad 1189 = 6 \cdot 204 - 35 \quad , \quad 6930 = 6 \cdot 1189 - 204 \ ,$$

$$99 = 6 \cdot 17 - 3 \quad , \quad 577 = 6 \cdot 99 - 17 \quad , \quad 3363 = 6 \cdot 577 - 99 \quad , \quad 19601 = 6 \cdot 3363 - 577 \ .$$

Ligningen (1) har løsningen

$$m = \frac{1 - 2n \pm k}{2} \ ,$$

og her kan vi ikke bruge fortegnet -, så vi får tabellen

n	1	6	35	204	1189	6930	40391	235416
k	3	17	99	577	3363	19601	114283	665857
m	1	3	15	85	493	2871	16731	97513

Altså har vi fundet

$$(m,n)\ :\ (85,204)\ ,\ (493,1189)\ ,\ (2871,6930)\ ,$$

dvs. vi får fx

$$85 + 86 + 87 + \cdots + 203 + 204 = 85 \cdot 204\ .$$

2. metode.

Vi får igen

$$8n^2 + 1 = k^2 \quad \text{eller} \quad k^2 - 8n^2 = 1\ .$$

Dette er en såkaldt *Pell-ligning* (se MatematikMagasinet 91, s. 3566) En primitiv løsning er (k,n) = (3,1) og efterfølgende løsninger genereres ved

$$k - n\sqrt{8} = (3-\sqrt{8})^t \quad \text{for} \quad t \geq 1\ .$$

Vi får for de første værdier af t, at

$t = 1$: $(k,n) = (3,1)$.

$t = 2$: $k - n\sqrt{8} = (3-\sqrt{8})^2 = 17 - 6\sqrt{8}$, så $(k,n) = (17,6)$.

$t = 3$: $k - n\sqrt{8} = (3-\sqrt{8})^3 = 99 - 35\sqrt{8}$, så $(k,n) = (99,35)$.

***3. metode* (efter Con Amore Problemgruppe, Birkerød).**

Vi sætter n = m+k så vi får

$$m + (m + 1) + \cdots + (n - 1) + n = m \cdot n$$

$$\Leftrightarrow \quad m + (m+1) + \cdots + (m+k) = m(m+k)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(2m+k)(k+1)}{2} = m^2 + mk \quad \Leftrightarrow \quad 2m^2 - 2m - k)k + 1) = 0\ .$$

Denne andengradsligning i m har den positive løsning løsning

$$m = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 2 \cdot k(k+1)}}{4} = \frac{1 + \sqrt{1 + 2k(k+1)}}{2}\ . \tag{2}$$

En nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at dette er en brugbar løsning er, at der findes et naturligt tal s, så

$$s^2 = 1 + 2k(k+1)\ ,$$

hvilket er ensbetydende med

$$2k^2 + 2k - 1 - s^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{-1 + \sqrt{2s^2 - 1}}{2}\ . \tag{3}$$

En heltallig løsning for k fås netop hvis $2s^2 - 1$ er et kvadrattal. Værdien $s = 1$ giver $k = 0$, hvilket ikke er interessant. Vi kræver $s > 1$, så

$$t^2 = 2s^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2s^2 - t^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(s\sqrt{2} + t\right)\left(s\sqrt{2} - t\right) = 1\ . \tag{4}$$

Heraf ses, at t^2 er ulige, så t er ulige. Altså er $t^2 \equiv 1 \pmod 4$, dvs, $t = 4z + 1$ og dermed

$$16z^2 + 1 + 8z = 2s^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad s^2 = 8z^2 + 4z + 1\ ,$$

så s^2 er ulige og dermed s ulige. Så finder vi af (2) og (3), at

$$k = \tfrac{1}{2}(-1+t)\ ,\quad m = \tfrac{1}{2}(1+s)\ .$$

Vi ser, at (4) har løsningen (s,t) = (1,1), fordi

$$\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)=1\ , \tag{5}$$

hvoraf

$$1=1^2=\left(\sqrt{2}+1\right)^2\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)^2=\left(3+2\sqrt{2}\right)\cdot\left(3-2\sqrt{2}\right)=3^2-2\cdot 2^2\ .$$

Dette er ikke en løsning til (4) på formen $2s^2$ - t^2 = 1, idet leddene er ombyttet. Imidlertid kan vi i (5) gange med 1:

$$\begin{aligned}1 &= \left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)\\ &=\left(\sqrt{2}+1\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)=\left(5\sqrt{2}+7\right)\left(5\sqrt{2}-7\right)=2\cdot 5^2-7^2\ .\end{aligned}\tag{6}$$

Dermed har vi i (4) fundet løsningen (s,t) = (5,7), hvoraf m = 3 og k = 3. Dette giver en løsning til opgaven:

$$3 + 4 + 5 + 6 = 3\cdot 6\ .$$

Videre findere vi ved igen at bruge (5) i ligningen (6):

$$\begin{aligned}1 &= \left(5\sqrt{2}+7\right)\left(5\sqrt{2}-7\right)=\left(5\sqrt{2}+7\right)\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(5\sqrt{2}-7\right)\left(\sqrt{2}-1\right)\\ &=\left(17+12\sqrt{2}\right)\left(17+12\sqrt{2}\right)=17^2-2\cdot 12^2\ .\end{aligned}$$

Igen er dette ikke en løsning til (4). I stedet kan vi i (6) gange med $\left(\sqrt{2}+1\right)^2\left(\sqrt{2}-1\right)^2$, dvs. med $\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)$:

$$\begin{aligned}1 &=\left(5\sqrt{2}+7\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)\cdot\left(5\sqrt{2}-7\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)\\ &=\left(29\sqrt{2}+41\right)\left(29\sqrt{2}-41\right)=2\cdot 29^2-41^2.\end{aligned}$$

Dermed er (s,t) = (29,41), så m = 15 og k = 20. En løsning til opgaven er altså

$$15 + 16 + \cdots + 35 = 15\cdot 35\ .$$

Således fortsættes med

$$1=\left(29\sqrt{2}+41\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)\cdot\left(29\sqrt{2}-41\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)=2\cdot 169^2-239^2\ ,$$

så (s,t) = (169,239) og m = 85 og k = 119. En løsning til opgaven er altså

$$85 + 86 + \cdots + 204 = 85\cdot 204\ .$$

På denne måde fortsættes med at bestemme en uendelig række af løsninger.