Svar på opgave 329 (April 2016)

Opgave:

Lad a, b og c være positive reelle tal, som ikke alle er ens.
Bestem de reelle løsninger (x,y,z) udtrykt ved a, b og c til ligningssystemet

$$x^2 - yz = a$$
$$y^2 - zx = b$$
$$z^2 - xy = c$$

Besvarelse:

Vi finder, at

$$a^2 - bc = (x^2 - yz)^2 - (y^2 - zx)(z^2 - xy)$$
$$= x^4 + y^2z^2 - 2x^2yz - y^2z^2 + xy^3 + xz^3 - x^2yz = x(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) .$$

Nu husker vi faktoropløsningen

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \tfrac{1}{2}(a + b + c)((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2)$$
$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) ,$$

og dette udtryk er ikke-negativt, når a, b og c er positive tal. Vi sætter $s = x + y + z$ så

$$a^2 - bc = x \cdot s \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) . \qquad (1)$$

Addition af de tre givne ligninger giver

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = a + b + c ,$$

så vi af (1) får

$$a^2 - bc = x \cdot s \cdot (a + b + c) . \qquad (2)$$

På samme måde fås:

$$b^2 - ca = y \cdot s \cdot (a + b + c) \quad \text{og} \quad c^2 - ab = z \cdot s \cdot (a + b + c) . \qquad (3)$$

Af (2) og (3) følger

$$(x \cdot s \cdot (a + b + c))^2 - y \cdot s \cdot (a + b + c) \cdot z \cdot s \cdot (a + b + c) = (a^2 - bc)^2 - (b^2 - ca)(c^2 - ab)$$
$$\Leftrightarrow \quad s^2(a + b + c)^2(x^2 - yz) = a^4 - 3a^2bc + ab^3 + ac^3 .$$

Her anvendes den første af de tre givne ligninger:

$$s^2(a + b + c)^2 \cdot a = a^4 - 3a^2bc + ab^3 + ac^3 \quad \Leftrightarrow \quad s^2(a + b + c)^2 = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

Som nævnt oven for er højre side ikke-negativ, så vi får

$$s \cdot (a + b + c) = \pm\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc} ,$$

og heri benyttes (2):

$$x = \frac{a^2 - bc}{s(a+b+c)} = \pm \frac{a^2 - bc}{\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}} \ .$$

Tilsvarende fås

$$y = \pm \frac{b^2 - ca}{\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}} \quad \text{og} \quad z = \pm \frac{c^2 - ab}{\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}} \ .$$