Svar på opgave 326 (Januar 2016)

Opgave:

Løs ligningssystemet

$$8x^2 = 18y + 7xy^2$$
$$8y^2 = 18x - 7yx^2 \;.$$

Besvarelse:

1. metode

Vi ser, at hvis $x = 0$ bliver $y = 0$ og omvendt. Altså er $(x,y) = (0,0)$ en løsning. Antag derfor, at hverken x eller y er 0.

Vi dividerer ligningerne med henholdsvis y og x og får

$$8\cdot\frac{x^2}{y} = 18 + 7xy \quad , \quad 8\cdot\frac{y^2}{x} = 18 - 7xy$$

Vi sætter for nemheds skyld

$$a = \frac{x^2}{y} \;\text{ og }\; b = xy \;,$$

hvoraf

$$\frac{y^2}{x} = \frac{xy\cdot y}{x^2} = \frac{b}{a} \;.$$

Ligningssystemet har nu udseendet

$$8a = 18 + 7b$$
$$8\cdot\tfrac{b}{a} = 18 - 7b \;.$$

Multiplikation af disse to ligninger giver

$$64b = 324 - 49b^2 \;\Leftrightarrow\; 49b^2 + 64b - 324 = 0 \;\Leftrightarrow\; b = \begin{cases} 2 \\ -\frac{162}{49} \end{cases} .$$

Heraf fås

$$a = \frac{18+7b}{8} = \begin{cases} 4 \\ -\frac{9}{14} \end{cases} .$$

I. $(a,b) = (4,2)$.

Her er både x og y positive og vi får

$$ab = x^3 = 8 \;\Leftrightarrow\; x = 2 \quad \text{og} \quad y = \frac{b}{x} = \frac{2}{2} = 1 \;,$$

En løsning er $(x,y) = (2,1)$, hvilket kontrolleres ved indsættelse.

II. $(a,b) = \left(-\frac{9}{14}, -\frac{162}{49}\right)$.
Her er

$$ab = x^3 = \frac{9 \cdot 162}{14 \cdot 49} = \frac{2 \cdot 9^3}{2 \cdot 7^3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{9}{7}$$

og

$$y = \frac{b}{x} = -\frac{162}{49} : \frac{9}{7} = -\frac{162 \cdot 7}{49 \cdot 9} = -\frac{18}{7} \ .$$

En løsning er altså $(x,y) = \left(\frac{9}{7}, -\frac{18}{7}\right)$, hvilket kontrolleres ved indsættelse.

2. metode

Den første ligning ganges med 8:

$$64x^2 = 144y + 7x \cdot 8y^2 \ ,$$

og heri indsættes den anden:

$$64x^2 = 144y + 7x(18x - 7yx^2) \quad \Leftrightarrow \quad (49x^3 - 144)y = 62x^3 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{62x^2}{49x^3 - 144} \ .$$

Hvis $x^3 = \frac{144}{49}$, er $(49x^3 - 144)y \neq 62x^2$.

Udtrykket for y indsættes i den anden ligning:

$$\frac{8 \cdot 62^2 \cdot x^4}{(49x^3 - 144)^2} = 18x - \frac{7 \cdot 62x^4}{49x^3 - 144}$$

$$\Leftrightarrow \quad 30752x^4 = 18x(49x^3 - 144)^2 - 434(49x^3 - 144)x^4$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^6 \cdot 7^3 \cdot x^7 - 2^6 \cdot 3473 \cdot x^4 + 2^9 \cdot 36 \cdot x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ 7^3 \cdot x^6 - 3473x^3 + 5832 = 0 \ .$$

Vi ser, at (0,0) passer i begge ligninger.

Ligningen

$$7^3 \cdot z^2 - 3473z^2 + 5832 = 0$$

løses, og videre regninger giver på sædvanlig måde, at

$$x = 2 \quad \vee \quad x = \tfrac{9}{7} \ .$$

Heraf fås de tilhørende værdier for y:

$$y = 1 \quad \vee \quad y = -\tfrac{18}{7} \ .$$

3. metode

Flere løsere bruger komplekse tal.
Multiplikation af de to ligninger giver

$$(18y + 7xy^2)(18x - 7yx^2) = 8x^2 \cdot 8y^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 324xy + 126(xy)^2 - 126(xy)^2 - 49(xy)^3 = 64(xy)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 49(xy)^3 + 64(xy)^2 - 324xy = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad xy = 0 \ \vee \ xy = \frac{-64 \pm \sqrt{4096 + 4 \cdot 49 \cdot 324}}{98} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{162}{49} \end{cases}$$

Hvis $x = 0$ ses ved indsættelse i ligningerne, at $y = 0$ og omvendt. Altså er $(x,y) = (0,0)$ en løsning.

Hvis $xy = 2$ fås af den første ligning

$$8x^2 = 18y + 7 \cdot 2y \quad \Leftrightarrow \quad y = \tfrac{1}{4}x^2 .$$

Dette indsættes, og vi får

$$\tfrac{1}{4}x^3 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \ \vee \ x = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3} \ \vee \ x = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \ ,$$

hvoraf de tilsvarende værdier for y:

$$y = 1 \ \vee \ y = \frac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \ \vee \ y = \frac{-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \ .$$

Hvis $xy = -\frac{162}{49}$ fås ved indsættelse i den første ligning:

$$8x^2 = \frac{18 \cdot 7}{7} y - 7 \cdot \frac{162}{49} y \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{14}{9} x^2 \ ,$$

og ved indsættelse fås

$$\frac{14}{9} x^3 = \frac{2 \cdot 81}{49} \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = \frac{3^6}{7^3} \quad \Leftrightarrow \quad (7x)^3 - 9^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (7x - 9)(49x^2 + 63x + 81) = 0$$

Dette giver løsningerne

$$x = \frac{9}{7} \ \vee \ x = \frac{-9 + 9\mathrm{i}\sqrt{3}}{14} \ \vee \ x = \frac{-9 - 9\mathrm{i}\sqrt{3}}{14} \ ,$$

og de tilhørende værdier for y er

$$y = -\frac{18}{7} \ \vee \ y = \frac{9}{7}\sqrt{-2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}} \ \vee \ y = \frac{9}{7}\sqrt{-2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}} \ .$$