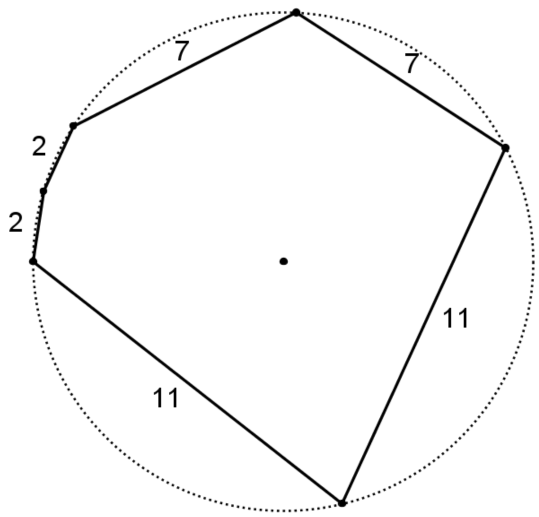
Svar på opgave 322 (September 2015)

Opgave:

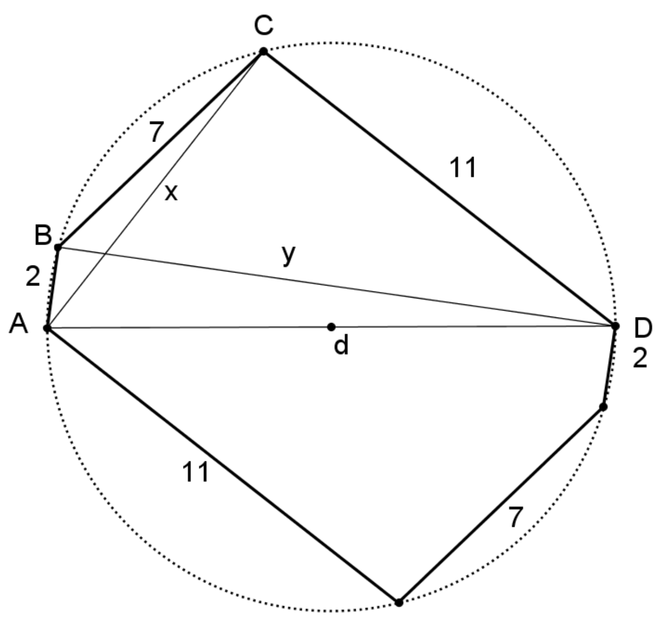
En sekskant har sidelængder
2, 2, 7, 7, 11, 11.

Bestem radius i den omskrevne cirkel, hvis sekskanten er indskrivelig.



Besvarelse: *ny version 16/10-2015*

1. metode.
Antag, at sekskanten er indskrivelig. Hver af de seks sider spænder over en korde i cirklen, der er uafhængig af dens placering i cirklen. Vi kan derfor ændre rækkefølgen af de seks centraltrekanters korder fra 2,2,7,7,11,11 til 2,7,11,2,7,11. Sekskanten med denne siderækkefølge er da også indskrivelig.



Vi ser på □$ABCD$ og sætter

$$x = AC \quad , \quad y = BD \quad , \quad d = AD \ .$$

Hvis denne firkant er indskrivelig, er

$$\angle ABD = \angle ACD = 90°.$$

Efter Ptolemæus sætning er

$$7 \cdot d + 2 \cdot 11 = n \ .$$

I ΔACD og ΔABD giver Pythagoras

$$x^2 + 121 = d^2 \quad \text{og} \quad y^2 + 4 = d^2.$$

Multiplikation giver

$$x^2y^2 = (d^2 - 121)(d^2 - 4) \ ,$$

og da desuden

$$x^2y^2 = (7d + 22)^2$$

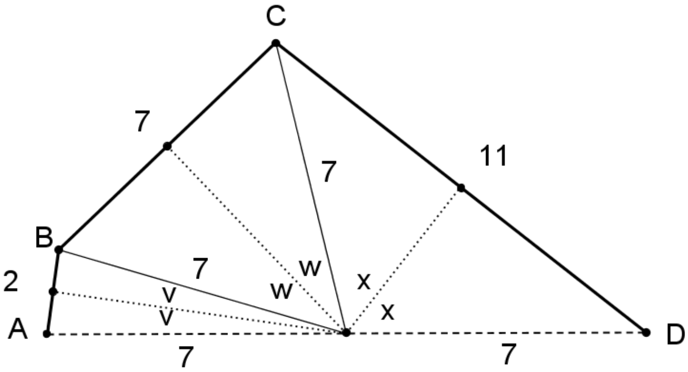
får vi

$$(7d + 22)^2 = (d^2 - 121)(d^2 - 4) \quad \Leftrightarrow \quad 49d^2 + 308d + 484 = d^4 - 125d^2 + 484$$
$$\Leftrightarrow \quad d^4 - 174d^2 - 308d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d^3 - 174d - 308 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (d - 14)(d^2 + 14d + 22) = 0$$

Her er $d = 14$ den eneste positive løsning. Dermed er radius i den omskrevne cirkel lig med 7.

Bemærkning. Det viser sig, at man ved hjælp af konfigurationen kan opnå en interessant formel for Arcsin.

Vi anbringer tre ligebenede trekanter med fælles toppunkt med siderne mod hinanden. Deres sidelængder er (7,7,2), (7,7,7) og (7,7,11). Vi betegner de halve topvinkler med v, w og x som vist.



Så er

$$\sin v = \frac{1}{7} \;,\; \sin w = \frac{1}{2} \;,$$

$$\sin x = \frac{5\frac{1}{2}}{7} = \frac{11}{14} \;.$$

Vi har at $v + w + x = 90°$, dvs. at

$$\mathrm{Arcsin}\,\tfrac{1}{7} + \mathrm{Arcsin}\,\tfrac{1}{2} + \mathrm{Arcsin}\,\tfrac{11}{14} = \tfrac{\pi}{2}$$

eller

$$\mathrm{Arcsin}\,\tfrac{1}{7} + \mathrm{Arcsin}\,\tfrac{11}{14} = \tfrac{\pi}{3} \;.$$

Vi kan desuden vise denne formel direkte, idet der gælder en additionsformel for Arcsin, nemlig

$$\mathrm{Arcsin}\,x + \mathrm{Arcsin}\,y = \begin{cases} \mathrm{Arcsin}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) \text{ hvis } xy \le 0 \text{ eller } x^2 + y^2 \le 1 \\ \pi - \mathrm{Arcsin}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) \text{ hvis } x > 0 \text{ og } y > 0 \text{ og } x^2 + y^2 > 1 \\ -\pi - \mathrm{Arcsin}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) \text{ hvis } x < 0 \text{ og } y < 0 \text{ og } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

I vores tilfælde er

$$x^2 + y^2 = \left(\tfrac{1}{7}\right)^2 + \left(\tfrac{11}{14}\right)^2 = \tfrac{1}{49} + \tfrac{121}{196} = \tfrac{125}{196} < 1 \,,$$

så vi får

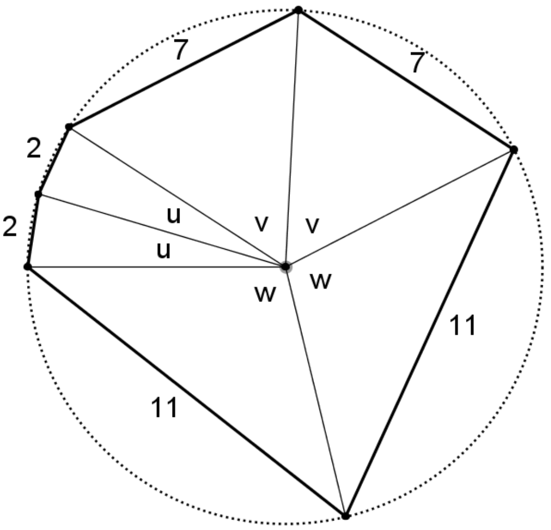
$$\mathrm{Arcsin}\,\tfrac{1}{7} + \mathrm{Arcsin}\,\tfrac{11}{14} = \mathrm{Arcsin}\left(\tfrac{1}{7}\sqrt{1-\tfrac{121}{196}} + \tfrac{11}{14}\sqrt{1-\tfrac{1}{49}}\right)$$
$$= \mathrm{Arcsin}\left(\tfrac{1}{7}\tfrac{\sqrt{75}}{14} + \tfrac{11}{14}\tfrac{\sqrt{48}}{7}\right) = \mathrm{Arcsin}\left(\tfrac{1}{7}\tfrac{5\sqrt{3}}{14} + \tfrac{11}{14}\tfrac{4\sqrt{3}}{7}\right)$$
$$= \mathrm{Arcsin}\,\tfrac{5\sqrt{3}+44\sqrt{3}}{14\cdot 7} = \mathrm{Arcsin}\,\tfrac{49\sqrt{3}}{14\cdot 7} = \mathrm{Arcsin}\,\tfrac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{\pi}{3} \,,$$

hvilket er det ønskede.

Bemærkning. Lad tallene x, y og z være givne positive tal og lad z være det største af de tre tal. For hver cirkel med diameter større end eller lig med z kan vi afsætte korder AB, BC og CD med længder x, y og z. I en stor cirkel spænder korderne over en centervinkel, der er mindre end 180°.

Hvis vi lader diameteren aftage, vokser center- vinklen, som *AB*, *BC* og *CD* spænder over (centervinklen er en kontinuert aftagende funktion af diameteren). Når diameteren er *z*, er centervinklen over 180° (måske over 360°). Heraf følger, at der findes præcis en diameter, så centervinklen er 180°.

2. metode.



En korde *k*, som spænder over en centervinkel *v* i en cirkel med radius *r* opfylder

$$\sin \tfrac{1}{2} v = \tfrac{k}{2r} \ ,$$

og med figurens betegnelser er derfor

$$\sin \frac{u}{2} = \frac{2}{2r} \ , \ \sin \frac{v}{2} = \frac{7}{2r} \ , \ \sin \frac{w}{2} = \frac{11}{2r} \ ,$$

og desuden er $2u + 2v + 2w = 360°$. For nemheds skyld sætter vi

$$A = \tfrac{1}{2} u \ , \ B = \tfrac{1}{2} v \ , \ C = \tfrac{1}{2} w \ ,$$

så

$$\sin A = \frac{2}{2r} \ , \ \sin B = \frac{7}{2r} \ , \ \sin C = \frac{11}{2r} \ ,$$

og $A + B + C = 90°$.

For vinkler, der opfylder, at $A + B + C = 90°$ gælder (se neden for)

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C + 2 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = 1 \ . \tag{1}$$

Dermed er

$$\frac{4}{4r^2} + \frac{49}{4r^2} + \frac{121}{4r^2} + 2 \cdot \frac{2}{2r} \cdot \frac{7}{2r} \cdot \frac{11}{2r} = 1 \ \Leftrightarrow \ 174 + \frac{154}{r} = 4r^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (r - 7)(2r^2 + 14r + 11) = 0 \ ,$$

og den eneste positive løsning til denne ligning er $r = 7$.

Vi viser nu formlen (1). Hvis $A + B + C = 90°$ giver additionsformlerne

$$0 = \cos((A + B) + C) = \cos(A + B) \cdot \cos C - \sin(A + B) \cdot \sin C$$

$$= \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C - \cos A \cdot \sin B \cdot \sin C - \sin A \cdot \cos B \cdot \sin C - \sin A \cdot \sin B \cdot \cos C \ ,$$

hvoraf

$$\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = \cos A \cdot \sin B \cdot \sin C + \sin A \cdot \cos B \cdot \sin C + \sin A \cdot \sin B \cdot \cos C$$

Kvadrering giver

$$\cos^2 A \cdot \cos^2 B \cdot \cos^2 C = \cos^2 A \cdot \sin^2 B \cdot \sin^2 C + \sin^2 A \cdot \cos^2 B \cdot \sin^2 C + \sin^2 A \cdot \sin^2 B \cdot \cos^2 C$$

$$+ 2 \cdot \sin A \cdot \cos A \cdot \sin B \cdot \cos B \cdot \sin^2 C + 2 \cdot \sin A \cdot \cos A \cdot \sin^2 B \cdot \sin C \cdot \cos C$$

$$+ 2 \cdot \sin^2 A \cdot \sin B \cdot \cos B \cdot \sin C \cdot \cos C$$

hvoraf

$$\cos^2 A \cdot \cos^2 B \cdot \cos^2 C - \cos^2 A \cdot \sin^2 B \cdot \sin^2 C - \sin^2 A \cdot \cos^2 B \cdot \sin^2 C - \sin^2 A \cdot \sin^2 B \cdot \cos^2 C$$

$$= 2 \cdot \sin A \cdot \cos A \cdot \sin B \cdot \cos B \cdot \sin^2 C + 2 \cdot \sin A \cdot \cos A \cdot \sin^2 B \cdot \sin C \cdot \cos C$$
$$+ 2 \cdot \sin^2 A \cdot \sin B \cdot \cos B \cdot \sin C \cdot \cos C \,. \qquad (2)$$

I denne ligning omskrives venstre side til

$$(1 - \sin^2 A)(1 - \sin^2 B)(1 - \sin^2 C) - (1 - \sin^2 A) \cdot \sin^2 B \cdot \sin^2 C$$
$$- \sin^2 A \cdot (1 - \sin^2 B) \cdot \sin^2 C - \sin^2 A \cdot \sin^2 B \cdot (1 - \sin^2 C) \,,$$

eller til

$$1 - (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) + 2 \sin^2 A \cdot \sin^2 B \cdot \sin^2 C \;.$$

Ligningen (2) ser nu sådan ud:

$$1 - (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) + 2 \sin^2 A \cdot \sin^2 B \cdot \sin^2 C$$
$$= 2 \cdot \sin A \cdot \cos A \cdot \sin B \cdot \cos B \cdot \sin^2 C + 2 \cdot \sin A \cdot \cos A \cdot \sin^2 B \cdot \sin C \cdot \cos C$$
$$+ 2 \cdot \sin^2 A \cdot \sin B \cdot \cos B \cdot \sin C \cdot \cos C \,. \qquad (3)$$

Her kan højre side omformes til

$$2 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \cdot (\cos A \cdot \cos B \cdot \sin C + \cos A \cdot \sin B \cdot \cos C + \sin A \cdot \cos B \cdot \cos C) \,. \qquad (4)$$

Nu giver additionsformlerne for sinus:

$$1 = \sin((A + B) + C) = \sin(A + B) \cdot \cos C + \cos(A + B) \cdot \sin C$$
$$\sin A \cdot \cos B \cdot \cos C + \cos A \cdot \sin B \cdot \cos C + \cos A \cdot \cos B \cdot \sin C - \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \,,$$

hvoraf

$$1 + \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \sin A \cdot \cos B \cdot \cos C + \cos A \cdot \sin B \cdot \cos C + \cos A \cdot \cos B \cdot \sin C \,.$$

Altså kan udtrykket (4) skrives således:

$$2 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \cdot (1 + \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C) \,,$$

og ligningen (3) får udseendet

$$1 - (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) + 2 \sin^2 A \cdot \sin^2 B \cdot \sin^2 C$$
$$= 2 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \cdot (1 + \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C) \,,$$

hvilket er ensbetydende med

$$1 - (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) = 2 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \,,$$

hvilket igen er ensbetydende med (1).

3. metode.

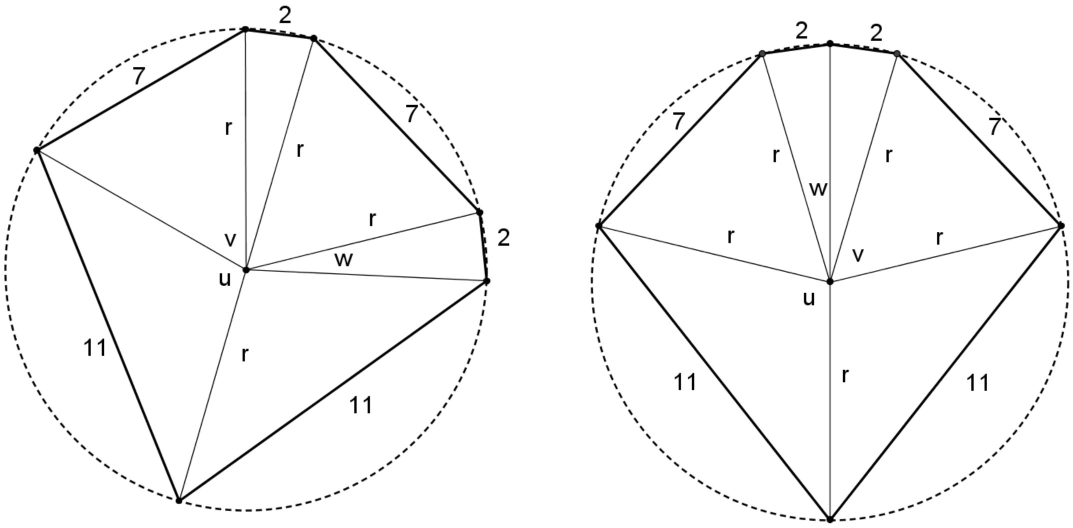
Vi læser opgaveteksten sådan, at det er underforstået, at sekskanten er konveks. Men vi opfatter ikke teksten sådan, at seks- kantens sider nødvendigvis (når sekskanten gennemløbes) optræder i den rækkefølge, hvori deres sidelængder er anført.

Sekskanten kan ud fra cirklens centrum opdeles i seks (to og to kongruente) ligebenede trekanter, hvis ben alle er radius r og hvis grundlinje er sekskantens seks sider. På de følgende figurer er en sådan opdeling vist ved et par eksempler.

Idet vi betegner topvinklerne i de ligebenede trekanter med u, v og w som vist på figurerne, har vi

$$\sin\frac{u}{2} = \frac{\frac{11}{2}}{r} = \frac{11}{2r} \quad , \quad \sin\frac{v}{2} = \frac{\frac{7}{2}}{r} = \frac{7}{2r} \quad , \quad \sin\frac{w}{2} = \frac{\frac{2}{2}}{r} = \frac{1}{r} \,,$$

$$\cos\frac{u}{2}=\sqrt{1-\frac{121}{4r^2}} \quad , \quad \cos\frac{v}{2}=\sqrt{1-\frac{49}{4r^2}} \quad , \quad \cos\frac{w}{2}=\sqrt{1-\frac{1}{r^2}} \ .$$



Hjulpet af et blik på figurerne gætter vi nu dristigt på, at r = 7 kan bruges; ved indsæt- telse finder vi da

$$\sin\tfrac{v}{2}=\tfrac{1}{2} \ \text{ og } \ \cos\tfrac{v}{2}=\tfrac{\sqrt{3}}{2} \ ,$$

altså v = 60° som forventet, og vi skal nu se, hvordan det går for u og w. Vi finder

$$\sin\frac{u}{2}=\frac{11}{14} \ , \ \cos\frac{u}{2}=\sqrt{1-\frac{121}{196}}=\frac{5\sqrt{3}}{14} \quad , \quad \sin\frac{w}{2}=\frac{1}{7} \quad , \quad \cos\frac{w}{2}=\sqrt{1-\frac{1}{49}}=\frac{4\sqrt{3}}{7} \ ,$$

og dermed

$$\sin u = 2\cdot\sin\frac{u}{2}\cdot\cos\frac{u}{2}=\frac{55\sqrt{3}}{48} \quad , \quad \cos u = 1-2\sin^2\frac{u}{2}=-\frac{23}{98}$$

$$\sin w = 2\cdot\sin\frac{w}{2}\cdot\cos\frac{w}{2}=\frac{8\sqrt{3}}{49} \quad , \quad \cos w = 1-2\sin^2\frac{w}{2}=\frac{47}{49} \ .$$

Vi finder da, at

$$\sin(u+w)=\sin u\cdot\cos w+\cos u\cdot\sin w=\frac{55\sqrt{3}}{98}\cdot\frac{47}{49}-\frac{23}{98}\cdot\frac{8\sqrt{3}}{49}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(u+w)=\cos u\cdot\cos w-\sin u\cdot\sin w=-\frac{23}{98}\cdot\frac{47}{49}-\frac{55\sqrt{3}}{98}\cdot\frac{8\sqrt{3}}{49}=-\frac{1}{2} \ .$$

Altså er $u + w$ = 120° og dermed $u + v + w$ = 180°, så $2u + 2v + 2w$ = 360°.

Dermed har det vist sig, at gætteriet var godt, og vi har fundet, at en løsning til opgaven er r = 7, og som vi skal se, er der ikke andre.

Vi bemærker først, at sekskantens omkreds må være mindre end cirklens, så

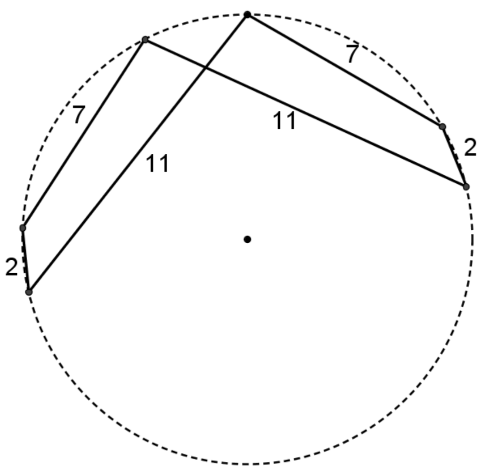
$$2\cdot 11 + 2\cdot 7 + 2\cdot 2 < 2\pi r \quad \text{dvs.} \quad r > \tfrac{20}{\pi} \ .$$

Vi betragter de seks ligebenede trekanter med ben r, grundlinjer 11, 7 og 2 og topvinkler u, v og w.

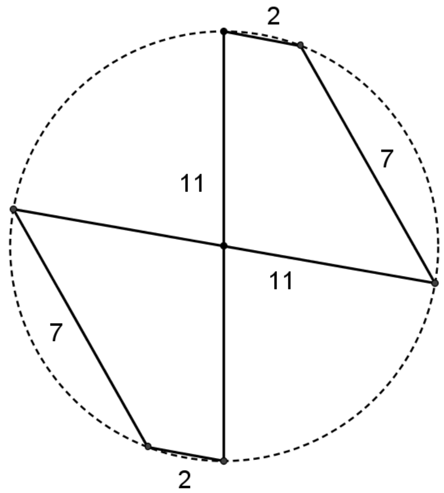
Hvis $\frac{20}{\pi} < r < 7$, er vinklerne u, v og w alle tre større, end de er for $r = 7$, og vi har dermed, at $2u + 2v + 2w > 360°$, og der bliver ikke plads til de seks trekanter i en cirkel med radius r.

Hvis $r > 7$, er vinklerne u, v og w alle tre mindre, end de er for $r = 7$, og vi har der- med, at $2u + 2v + 2w < 360°$, og de seks trekanter kan da ikke tilsammen udgøre en sekskant indskrevet i en cirkel med radius r.

Altså har opgaven (når vi underforstår, at det drejer sig om en konveks sekskant) en og kun en løsning, nemlig $r = 7$.



R > 5.5



R = 5.5

Bemærkning. Hvis sekskanten *ikke* nødvendigvis er konveks og at sekskantens sider *ikke* nødvendigvis optræder i den rækkefølge, hvori deres længder er anført, kan man foretage følgende overvejelser.
Da sekskanten har to sider af længde 11, kan cirklens diameter ikke være mindre end 11. Af figurerne fremgår, at der findes ukonvekse sekskanter, for hvilke $r = 5\frac{1}{2}$ og også ukonvekse sekskanter, hvor r er et vilkårligt tal større end $5\frac{1}{2}$.
Endelig kan nogle af sekskantens sider være sammenfaldende. Dette giver yderligere en mængde muligheder for figurer.