Svar på opgave 320 (Maj 2015)

Opgave:

a. I ΔABC opfylder sider og vinkler, at

$$\frac{a\cdot\tan A+b\cdot\tan B}{a+b}=\cot\tfrac{1}{2}C\ .$$

Vis, at trekanten er ligebenet.

b. I ΔABC opfylder sider og vinkler, at

$$(a^2+b^2)\cdot\sin(A-B)=(a^2-b^2)\cdot\sin(A+B)\ .$$

Vis, at trekanten er ligebenet eller retvinklet.

Besvarelse:

a.

Vi omskriver sådan:

$$a+b=\tan\tfrac{1}{2}C\cdot(a\cdot\tan A+b\cdot\tan B)$$

$$\Leftrightarrow\quad a-a\cdot\tan\tfrac{1}{2}C\cdot\tan A=b\cdot\tan\tfrac{1}{2}C\cdot\tan B-b$$

$$\Leftrightarrow\quad a\left(1-\frac{\sin\frac{1}{2}C\cdot\sin A}{\cos\frac{1}{2}C\cdot\cos A}\right)=-b\left(1-\frac{\sin\frac{1}{2}C\cdot\sin B}{\cos\frac{1}{2}C\cdot\cos B}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad a\cdot\frac{\cos A\cdot\cos\frac{1}{2}C-\sin A\cdot\sin\frac{1}{2}C}{\cos A\cdot\cos\frac{1}{2}C}=-b\cdot\frac{\cos B\cdot\cos\frac{1}{2}C-\sin B\cdot\sin\frac{1}{2}C}{\cos B\cdot\cos\frac{1}{2}C}$$

$$\Leftrightarrow\quad a\cdot\frac{\cos\left(A+\frac{1}{2}C\right)}{\cos A}=-b\cdot\frac{\cos\left(B+\frac{1}{2}C\right)}{\cos B}$$

$$\Leftrightarrow\quad a\cdot\cos B\cdot\cos\left(A+\tfrac{1}{2}C\right)+b\cdot\cos A\cdot\cos\left(B+\tfrac{1}{2}C\right)=0\ . \qquad (1)$$

Nu er

$$\tfrac{1}{2}C=90^\circ-\tfrac{1}{2}(A+B)$$

så

$$A+\tfrac{1}{2}C=A+90^\circ-\tfrac{1}{2}(A+B)=90^\circ-\tfrac{1}{2}(B-A)$$

$$B+\tfrac{1}{2}C=B+90^\circ-\tfrac{1}{2}(A+B)=90^\circ-\tfrac{1}{2}(A-B)$$

Altså er (1) ensbetydende med

$$a \cdot \cos B \cdot \sin \tfrac{1}{2}(B-A) - b \cdot \cos A \cdot \sin \tfrac{1}{2}(B-A) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin \tfrac{1}{2}(B-A) \cdot [a \cdot \cos B - b \cdot \cos A] = 0 \ .$$

Hvis $\sin \tfrac{1}{2}(B-A) = 0$, er $B = A$ og trekanten er ligebenet.
Hvis

$$a \cdot \cos B - b \cdot \cos A = 0 \quad ,$$

giver cosinusrelationen

$$a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + c^2 - b^2 = b^2 + c^2 - a^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = b^2 \ .$$

Også i dette tilfælde er trekanten ligebenet.

b.

Vi omskriver til

$$a^2\,(\sin(A + B) - \sin(A - B)) = b^2\,(\sin(A + B) + \sin(A - B)).$$

Dette er efter de logaritmiske former ensbetydende med

$$2a^2 \cdot \sin B \cdot \cos A = 2b^2 \cdot \sin A \cdot \cos B \ . \tag{2}$$

Sinusrelationen giver

$$a = \frac{b \cdot \sin A}{\sin B} \ ,$$

så (2) er ensbetydende med

$$\frac{b^2 \cdot \sin^2 A}{\sin^2 B} \cdot \sin B \cdot \cos A = b^2 \cdot \sin A \cdot \cos B$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin A \cdot \cos A = \sin B \cdot \cos B \quad \Leftrightarrow \quad \sin 2A = \sin 2B \ .$$

Altså er

$$2A = 2B \quad \text{eller} \quad 2A + 2B = 180°$$

eller

$$A = B \quad \text{eller} \quad A + B = 90° \ .$$