Svar på opgave 319 (April 2015)

Opgave:

Vis, at middeltallet af tallene

$2\cdot\sin2°$, $4\cdot\sin4°$, $6\cdot\sin6°$, ... , $180\cdot\sin180°$

er $\cot1°$.

Besvarelse:

1. metode

Vi skal vise, at

$$2\cdot\sin 2°+4\cdot\sin 4°+6\cdot\sin 6°+\cdots+178\cdot\sin178°+180\cdot\sin180°=90\cdot\cot1° ,$$

hvilket er ensbetydende med

$$2\cdot\sin 2°\cdot\sin1°+2(2\sin 4°\cdot\sin1°)+\cdots+89(2\sin178°\cdot\sin1°)=90\cdot\cos1° .$$

Nu er som bekendt

$$2\cdot\sin x\cdot\sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$$

så

$$2\cdot\sin2k°\cdot\sin1° = \cos(2k - 1)° - \cos(2k + 1)° .$$

Altså er

$$2\cdot\sin 2°\cdot\sin1°+2(2\sin 4°\cdot\sin1°)+\cdots+89(2\sin178°\cdot\sin1°)$$

$$= (\cos1° - \cos3°) + 2(\cos3° - \cos5°) +\cdots+ 89(\cos177° - \cos179°)$$

$$= \cos1° + \cos3° +\cdots+ \cos177° - 89\cdot\cos179°$$

$$= \cos1° + (\cos3° + \cos177°) + (\cos5° + \cos175°) + \cdots + (\cos89° + \cos91°) + 89\cdot\cos1°$$

$$= \cos1° + 89\cdot\cos1° = 90\cdot\cos1° ,$$

hvilket er det ønskede.

2. metode

Vi bruger komplekse tal og sætter

$$z = \cos2° + i\sin2° = \operatorname{cis}2° \quad \text{hvoraf} \quad z^n = \cos2n° + i\sin2n° .$$

Lad a og b være reelle tal, så

$$z + 2z^2 + 3z^3 +\cdots+ 89z^{89} = a + b\,i$$

Da sin 180° = 0, er

$$\begin{aligned} b &= \sin 2° + 2\cdot\sin 4° + 3\cdot\sin 6° + \cdots + 89\cdot\sin 178° \\ &= \tfrac{1}{2}(2\cdot\sin 2° + 4\cdot\sin 4° + 6\cdot\sin 6° + \cdots + 178\cdot\sin 178°)\ . \end{aligned} \tag{1}$$

Vi sætter

$$p_n(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n\ ,$$

så

$$x\cdot p_n(x) = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \cdots + nx^{n+1}\ .$$

Subtraktion giver

$$(1 - x)p_n(x) = p_n(x) - xp_n(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n - nx^{n+1} = \frac{x - x^{n+1}}{1-x} - nx^{n+1}\ .$$

Altså er

$$p_n(x) = \frac{x - x^{n+1}}{(1-x)^2} - \frac{nx^{n+1}}{1-x}\ .$$

Dermed får vi

$$a + bi = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots + 89z^{89} = p_{89}(z) = \frac{z - z^{90}}{(1-z)^2} - \frac{89\cdot z^{90}}{1-z}\ .$$

Nu er

$$z^{90} = \cos 180° + i \sin 180° = -1\ ,$$

så

$$a + bi = \frac{z+1}{(1-z)^2} - \frac{89}{1-z}\ .$$

Her er

$$\begin{aligned} z + 1 &= \cos 2° + i \sin 2° + 1 = 2\cdot\cos^2 1° - 1 + i\cdot 2\sin 1°\cdot\cos 1° + 1 \\ &= 2\cos 1°\cdot(\cos 1° + i\cdot\sin 1°) = 2\cos 1°\cdot \operatorname{cis} 1°\ , \\ z - 1 &= \cos 2° + i \sin 2° - 1 = 1 - 2\sin^2 1° + i\cdot 2\sin 1°\cdot\cos 1° - 1 \\ &= 2\sin 1°\cdot(-\sin 1° + i\cdot\cos 1°) = 2\sin 1°\cdot(\cos 91° + i\cdot\sin 91°) = 2\sin 1°\cdot\operatorname{cis} 91°\ . \end{aligned}$$

Dermed får vi

$$\begin{aligned} a + bi &= \frac{2\cos 1°\cdot\operatorname{cis} 1°}{(2\sin 1°\cdot\operatorname{cis} 91°)^2} - \frac{89}{2\sin 1°\cdot\operatorname{cis} 91°} = \frac{2\cos 1°\cdot\operatorname{cis} 1°}{4\sin^2 1°\cdot\operatorname{cis} 182°} - \frac{89\cdot\operatorname{cis}(-91°)}{2\sin 1°} \\ &= \frac{\cos 1°\cdot\operatorname{cis}(-181°)}{2\sin^2 1°} - \frac{89\cdot\operatorname{cis}(-91°)}{2\sin 1°}\ . \end{aligned}$$

Altså er

$$\begin{aligned} b &= \frac{\cos 1°\cdot\sin(-181°)}{2\sin^2 1°} - \frac{89\cdot\sin(-91°)}{2\sin 1°} \\ &= \frac{\cos 1°\cdot\sin 1°}{2\sin^2 1°} + \frac{89\cos 1°}{2\sin 1°} = \frac{\cos 1°}{2\sin 1°} + \frac{89\cos 1°}{2\sin 1°} = 45\cot 1°\ . \end{aligned}$$

Efter (1) er så

$$2\cdot\sin 2° + 4\cdot\sin 4° + 6\cdot\sin 6° + \cdots + 178\cdot\sin 178° = 90\cdot\cot 1°$$

eller

$$2\cdot\sin 2° + 4\cdot\sin 4° + 6\cdot\sin 6° + \cdots + 178\cdot\sin 178° + 180\cdot\sin 180° = 90\cdot\cot 1°\ .$$