Svar på opgave 318 (Marts 2015)

Opgave:

Vis, at der for positive reelle tal a, b og c gælder

$$\frac{a}{2a+b+c}+\frac{b}{2b+c+a}+\frac{c}{2c+a+b} \le \frac{a}{2b+2c}+\frac{b}{2c+2a}+\frac{c}{2a+2b} .$$

Besvarelse:

1. metode

Vi får, at

$$\frac{a}{2a+b+c}-\frac{a}{2b+2c}=\frac{a(2b+2c)-a(2a+b+c)}{2(b+c)(2a+b+c)}=\frac{-a(2a-b-c)}{2(b+c)(2a+b+c)}$$

og tilsvarende

$$\frac{b}{2b+c+a}-\frac{b}{2c+2a}=\frac{-b(2b-a-c)}{2(c+a)(2b+c+a)}$$

og

$$\frac{c}{2c+a+b}-\frac{c}{2a+2b}=\frac{-c(2c-a-b)}{2(a+b)(2c+a+b)} .$$

Derfor er uligheden ensbetydende med

$$\frac{a(2a-b-c)}{2(b+c)(2a+b+c)}+\frac{b(2b-c-a)}{2(c+a)(2b+c+a)}+\frac{c(2c-a-b)}{2(a+b)(2c+a+b)} \ge 0 .$$

Nu er

$$\frac{a(2a-b-c)}{2(b+c)(2a+b+c)} \ge \frac{a(2a-b-c)}{2(a+b+c)(2a+2b+2c)}=\frac{a(2a-b-c)}{4(a+b+c)^2} .$$

Altså er

$$\frac{a(2a-b-c)}{2(b+c)(2a+b+c)}+\frac{b(2b-c-a)}{2(c+a)(2b+c+a)}+\frac{c(2c-a-b)}{2(a+b)(2c+a+b)}$$

$$\ge \frac{a(2a-b-c)+b(2b-c-a)+c(2c-a-b)}{4(a+b+c)^2}=\frac{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}{4(a+b+c)^2} \ge 0 .$$

2. metode

Vi sætter

$$x = b + c \quad , \quad y = c + a \quad , \quad z = a + b .$$

Dermed er

$$y + z - x = 2a \quad , \quad z + x - y = 2b \quad , \quad x + y - z = 2c \quad ,$$

$$y + z = 2a + b + c \quad , \quad x + z = 2b + c + a \quad , \quad x + y = 2c + a + b \ ,$$

så uligheden er ensbetydende med

$$\frac{\frac{1}{2}(y+z-x)}{y+z}+\frac{\frac{1}{2}(z+x-y)}{z+x}+\frac{\frac{1}{2}(x+y-z)}{x+y} \ \le \ \frac{\frac{1}{2}(y+z-x)}{2x}+\frac{\frac{1}{2}(z+x-y)}{2y}+\frac{\frac{1}{2}(x+y-z)}{2z}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y+z-x}{y+z}+\frac{z+x-y}{z+x}+\frac{x+y-z}{x+y} \ \le \ \frac{y+z-x}{2x}+\frac{z+x-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3-\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right) \ \le \ \frac{y+z}{2x}+\frac{z+x}{2y}+\frac{x+y}{2z}-\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 9 \ \le \ \frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}+\frac{2x}{y+z}+\frac{2y}{z+x}+\frac{2z}{x+y}$$

$$\Leftrightarrow \quad 9 \ \le \ \frac{y+z}{2x}+\frac{z+x}{2y}+\frac{x+y}{2z}+\frac{y+z}{2x}+\frac{z+x}{2y}+\frac{x+y}{2z}+\frac{2x}{y+z}+\frac{2y}{z+x}+\frac{2z}{x+y} \quad .$$

Efter uligheden mellem aritmetisk og geometrisk middeltal er

$$\frac{y+z}{2x}+\frac{z+x}{2y}+\frac{x+y}{2z}+\frac{y+z}{2x}+\frac{z+x}{2y}+\frac{x+y}{2z}+\frac{2x}{y+z}+\frac{2y}{z+x}+\frac{2z}{x+y} \ge 9\cdot\sqrt[9]{\frac{y+z}{2x}\cdot\frac{z+x}{2y}\cdot\frac{x+y}{2z}} \ .$$

Idet

$$\tfrac{1}{2}(y+z) \ge \sqrt{yz} \quad , \quad \tfrac{1}{2}(z+x) \ge \sqrt{zx} \quad , \quad \tfrac{1}{2}(x+y) \ge \sqrt{xy}$$

er

$$9\cdot\sqrt[9]{\frac{y+z}{2x}\cdot\frac{z+x}{2y}\cdot\frac{x+y}{2z}} \ge 9\cdot\sqrt[9]{\frac{\sqrt{yz}}{x}\cdot\frac{\sqrt{zx}}{y}\cdot\frac{\sqrt{xy}}{z}} = 9 \ .$$

3. metode

Efter Jensens ulighed gælder for en konkav funktion *f*, at

$$f\left(\tfrac{x+y+z}{3}\right) \ge \tfrac{1}{3}\big(f(x)+f(y)+f(z)\big) \quad .$$

Betragt nu funktionen

$$f(x) = \frac{x}{x+a+b+c} \quad ,$$

hvor a, b og c er positive og $x > 0$. Vi finder, at

$$f''(x) = -\frac{2a+2b+2c}{(x+a+b+c)^3} < 0 \quad ,$$

så $f'(x)$ er aftagende og dermed er $f(x)$ konkav. Så er

$$f\left(\tfrac{a+b+c}{3}\right) = \frac{\frac{1}{3}(a+b+c)}{\frac{1}{3}(a+b+c)+a+b+c} = \frac{1}{4} \ ,$$

og

$$\frac{1}{3}\big(f(a)+f(b)+f(c)\big) = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2a+b+c}+\frac{b}{2b+a+c}+\frac{c}{2c+a+b}\right) \quad .$$

Altså er

$$\frac{1}{4} \geq \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2a+b+c}+\frac{b}{2b+a+c}+\frac{c}{2c+a+b}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a}{2a+b+c}+\frac{b}{2b+a+c}+\frac{c}{2c+a+b} \leq \frac{3}{4}\,. \tag{1}$$

Vi minder om den kendte *Nesbitts ulighed* for positive tal:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad \text{eller} \quad \frac{3}{4} \leq \frac{a}{2b+2c}+\frac{b}{2c+2a}+\frac{c}{2a+2b}\,. \tag{2}$$

Af (1) og (2) fås

$$\frac{a}{2a+b+c}+\frac{b}{2b+a+c}+\frac{c}{2c+a+b} \leq \frac{3}{4} \leq \frac{a}{2b+2c}+\frac{b}{2c+2a}+\frac{c}{2a+2b}\,,$$

hvilket indeholder den ønskede ulighed. Vi har desuden fundet, at de to sider af uligheden adskilles af tallet $\frac{3}{4}$. Hvis $a = b = c$ gælder lighedstegn.