# Svar på opgave 316 (Januar 2015)

## *Opgave:*

Skaf rational nævner i brøken

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}} \quad .$$

## *Besvarelse:*

Vi husker (!) faktoropløsningen

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \quad ,$$

hvoraf

$$\frac{1}{x+y+z} = \frac{x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx}{x^3+y^3+z^3-3xyz} \quad .$$

Vi sætter

$$x = \sqrt[3]{a} \quad , \quad y = \sqrt[3]{b} \quad , \quad z = \sqrt[3]{c} \quad .$$

og får

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}} = \frac{\sqrt[3]{a}^2+\sqrt[3]{b}^2+\sqrt[3]{c}^2-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{bc}-\sqrt[3]{ac}}{a+b+c-3\sqrt[3]{abc}} \qquad (1)$$

En brøk med en sum af 3 kubikrødder i nævneren er dermed omskrevet til en brøk med en nævner af typen $p-\sqrt[3]{q}$ . Nu er

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 - xy + y^2) \, ,$$

hvoraf

$$\frac{1}{x-y} = \frac{x^2-xy+y^2}{x^3-y^3} \quad ,$$

så at

$$\frac{1}{p-\sqrt[3]{q}} = \frac{p^2-p\sqrt[3]{q}+\sqrt[3]{q^2}}{p^3-q} \quad , \qquad (2)$$

hvor nævneren er rational. Hvis vi sætter $p = a + b + c$ og $q = 27abc$ har vi fået bortskaffet kubikrødderne i nævneren i (1).

Vi kan nævne, at brøken (1) får udseendet

$$\frac{\left(\sqrt[3]{a}^2+\sqrt[3]{b}^2+\sqrt[3]{c}^2-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{bc}-\sqrt[3]{ac}\right)\cdot\left((a+b+c)^2+(a+b+c)\cdot\sqrt[3]{27abc}+\sqrt[3]{27abc}^2\right)}{(a+b+c)^3-27abc} \quad .$$

Vi ser på et eksempel. Vi får ved at følge udregningerne oven for, at

$$\frac{1}{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{10}}=\frac{\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{100}-\sqrt[3]{28}-\sqrt[3]{40}-\sqrt[3]{70}}{21-\sqrt[3]{7560}} .$$

Efter (2) er

$$\frac{1}{21-\sqrt[3]{7560}}=\frac{441-21\cdot\sqrt[3]{7560}+\sqrt[3]{7560^2}}{21^3-7560} .$$

og dermed får vi følgende monstrum:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{10}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{100}-\sqrt[3]{28}-\sqrt[3]{40}-\sqrt[3]{70}\right)\cdot\left(21^2-21\sqrt[3]{7560}+\sqrt[3]{7560^2}\right)}{1701} .$$

Sammenlign dette med den sædvanlige simple metode til at skaffe rational nævner for en sum (differens) af to kvadratrødder:

$$\frac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{7}}{\left(\sqrt{10}-\sqrt{7}\right)\cdot\left(\sqrt{10}+\sqrt{7}\right)}=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{7}}{10-7}=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{7}}{3} .$$