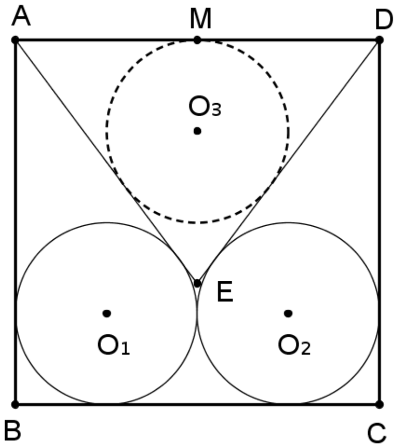
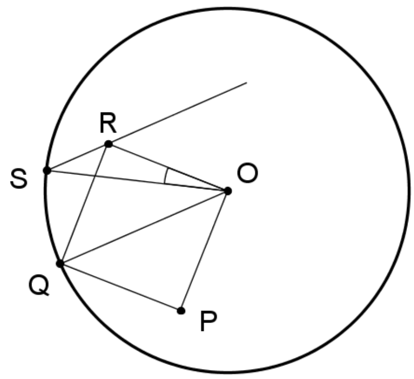
Svar på opgave 315 (December 2014)

Opgave:

a. To cirkler med centrer O_1 og O_2 med samme radius tangerer hinanden udvendigt og tangerer siderne i et kvadrat *ABCD* som vist.
Tangenterne fra *A* og *D* til de to cirkler skærer hinanden i *E*.
Vis, at den indskrevne cirkel i ΔADE har samme radius som de to andre cirkler.

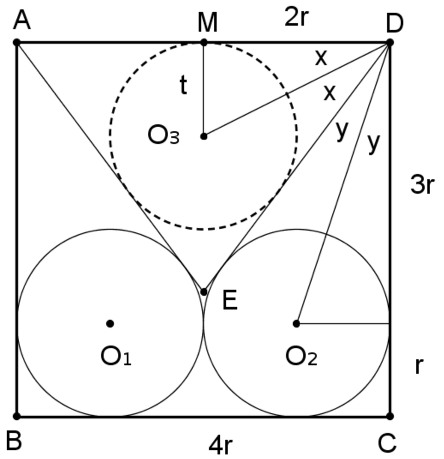




b. En cirkel har centrum i *O* og *OQ* er en radius. *OQ* er diagonal i kvadratet *OPQR*. En linje gennem *R* parallel med *OQ* skærer cirklen i *S*. Bestem $\angle ROS$.

Besvarelse:

a. Lad kvadratet have en sidelængde på 4r, så radierne i cirklerne med centrer O_1 og O_2 er *r*. Radius i den indskrevne cirkel i ΔADE sætter vi til *t*.



Linjerne DO_2 og DO_3 halverer vinklerne *ADE* og *EDC*, så vi med figurens betegnelser får

$$2x + 2y = 90° \quad \Leftrightarrow \quad x + y = 45° \ .$$

Desuden er $\tan y = \frac{1}{3}$ og da den indskrevne cirkel i ΔADE tangerer *AD* i midtpunktet *M*, er $\tan x = \frac{t}{2r}$. Dermed er

$$1 = \tan 45° = \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} \quad ,$$

hvoraf

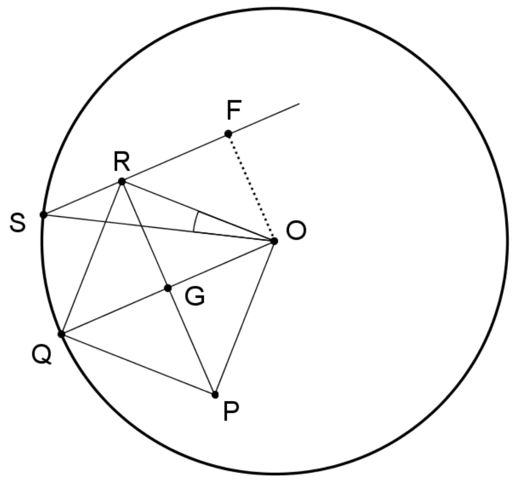
$$1 = \frac{\frac{t}{2r} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{t}{2r} \cdot \frac{1}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \frac{3t + 2r}{6r - t} \Leftrightarrow \quad 3t + 2r = 6r - t \quad \Leftrightarrow \quad t = r \quad .$$

b.

1. metode.

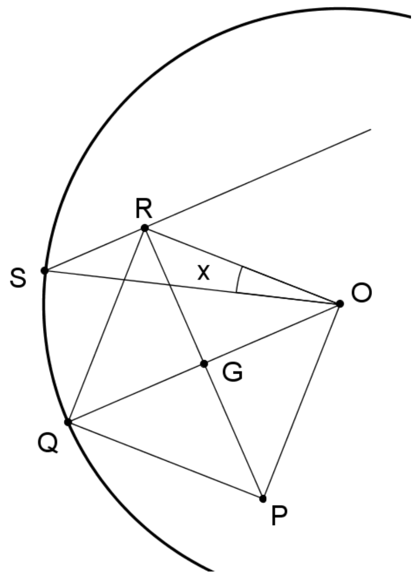
Lad *F* være projektionen af *O* på *SR* og *G* diagonalernes skærings- punkt. Vi har, at $PR \perp OQ$, så $PR \perp SF$. I □*FRGP* findes nu tre rette vinkler, så fir- kanten er et rektangel. Men da *RG* = *OG* er den endda et kvadrat. Da radierne *OQ* og *OS* er lige lange, får vi

$$OF = RG = \tfrac{1}{2} RP = \tfrac{1}{2} OQ = \tfrac{1}{2} SO \ .$$



I den retvinklede ΔSOF er så en katete halvt så lang som hypotenusen, så ΔSOF er en 30°-60°-90°-trekant med $\angle SOF = 60°$. Men så er

$$\angle ROS = \angle SOF - \angle ROF = 60° - 45° = 15°.$$



2. metode.

Vi sætter $\angle SOR = x$ og OR = 1. Så er

$$OQ = OS = \sqrt{2}\ .$$

Da $\angle ORRQ = 90°$ og $\angle OQR = \angle QRS = 45°$, er $\angle ORS = 135°$.
I ΔROS er så

$$\angle RSO = 180° - 135° - x\ ,$$

og sinusrelationen i ΔROS giver

$$\frac{\sin(45° - x)}{1} = \frac{\sin 135°}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(45° - x) = \tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 45° - x = 30° \quad \Leftrightarrow \quad x = 15°\ .$$