Svar på opgave 307
(Februar 2014)

Opgave:

Løs inden for de reelle tal ligningssystemet

$$x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}\ .$$

Besvarelse:

1. metode

Vi ser, at $x, y, z \neq 0$. Vi sætter

$$a=x+\tfrac{1}{y}\quad ,$$

hvoraf

$$\frac{1}{y}=a-x \quad\Leftrightarrow\quad y=\frac{1}{a-x} \qquad \text{og} \qquad z=x+\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=a-\frac{1}{x}=\frac{ax-1}{x}\quad .$$

Altså er

$$a=y+\frac{1}{z} \quad\Leftrightarrow\quad a=\frac{1}{a-x}+\frac{x}{ax-1} \quad\Leftrightarrow\quad a(a-x)(ax-1)=ax-1+x(a-x)$$

$$\Leftrightarrow\quad a^3x-a^2-a^2x^2+ax=ax-1+ax-x^2 \quad\Leftrightarrow\quad (1-a^2)(x^2-ax+1)=0\ .$$

Derfor har vi

$$x^2 - ax + 1 = 0 \qquad \text{eller} \qquad a = \pm 1\ .$$

I. $\boldsymbol{x^2 - ax + 1 = 0}$**.**

Vi får, at

$$ax=x^2+1 \quad\Leftrightarrow\quad a=\frac{x^2+1}{x}=x+\frac{1}{x}$$

og

$$a=x+\frac{1}{y} \quad\Leftrightarrow\quad x+\frac{1}{x}=x+\frac{1}{y} \quad\Leftrightarrow\quad x=y$$

$$a=z+\frac{1}{x} \quad\Leftrightarrow\quad x+\frac{1}{x}=z+\frac{1}{x} \quad\Leftrightarrow\quad x=z.$$

Dermed er (som forventet) talsættene

$$(x,y,z) = (t,t,t)\quad ,\quad t\in R\quad ,\quad t \neq 0$$

løsninger.

II. a = 1.

Vi får

$$1 = x + \frac{1}{y} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{1-x} \qquad \text{og} \qquad 1 = z + \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{x-1}{x} \quad .$$

Altså har vi fundet løsningssættene

$$(x, y, z) = \left(t \, , \, \frac{1}{1-t} \, , \, \frac{t-1}{t} \right) \quad , \quad t \neq 0 \, , 1 \; .$$

III. a = -1 .

Vi får

$$-1 = x + \frac{1}{y} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{-1}{1+x} \qquad \text{og} \qquad -1 = z + \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{-x-1}{x} \quad .$$

Løsningssættene er

$$(x, y, z) = \left(t \, , \, \frac{-1}{1+t} \, , \, \frac{-1-t}{t} \right) \quad , \quad t \neq 0 \, , -1 \; .$$

2. metode

Vi isolerer z:

$$x + \frac{1}{y} = z + \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad z = x + \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \qquad \text{og} \qquad x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{z} = x + \frac{1}{y} - y \; .$$

Multiplikation af disse to ligninger giver

$$\left(x + \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right)\left(x + \frac{1}{y} - y \right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^3y^2 + 2x^2y - x^2y^3 + x - 3xy^2 - y + y^3 = 0$$

Vi ser, at $x = y$ passer i denne ligning, så den er ensbetydende med

$$(x - y)(x^2y^2 + 2yx + 1 - y^2) = 0 \tag{1}$$

Den sidste parentes er et andengradspolynomium i x med diskriminanten

$$(2y)^2 - 4y^2(1 - y^2) = 4y^4 \, ,$$

så rødderne er

$$x = \frac{-2y \pm 2y^2}{2y^2} = \frac{-1 \pm y}{y} \; .$$

Ligningen (1) er altså ensbetydende med

$$(x - y)\left(x - \frac{y-1}{y} \right)\left(x - \frac{-1-y}{y} \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - y)\left(x - 1 + \frac{1}{y} \right)\left(x + 1 + \frac{1}{y} \right) = 0 \; .$$

Vi deler op i tilfælde:

I. $\boldsymbol{x - y = 0}$**.**

Så er $x = y$ og

$$z = x + \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = x \ .$$

Dermed får vi løsningerne

$$(x,y,z) = (t,t,t) \quad , \quad t \neq 0$$

II. $\boldsymbol{x - 1 + \frac{1}{y} = 0}$ **.**

Idet $x + \frac{1}{y} = 1$ fås, at

$$y = \frac{1}{1-x} \quad \text{og} \quad z = 1 + \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \ .$$

Dermed har vi løsningerne

$$(x,y,z) = \left(t \ , \ \frac{1}{1-t} \ , \ \frac{t-1}{t} \right) \quad , \quad t \neq 0 \ , 1 \ .$$

III. $\mathbf{x + 1 + \frac{1}{y} = 0}$ **.**

Idet $x + \frac{1}{y} = -1$ får vi

$$y = \frac{-1}{1+x} \quad \text{og} \quad z = x + \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = -1 - \frac{1}{x} = \frac{-x-1}{x} \ .$$

Altså får vi løsningerne

$$(x,y,z) = \left(t \ , \ \frac{-1}{1+t} \ , \ \frac{-t-1}{t} \right) \quad , \quad t \neq 0 \ , -1 \ .$$