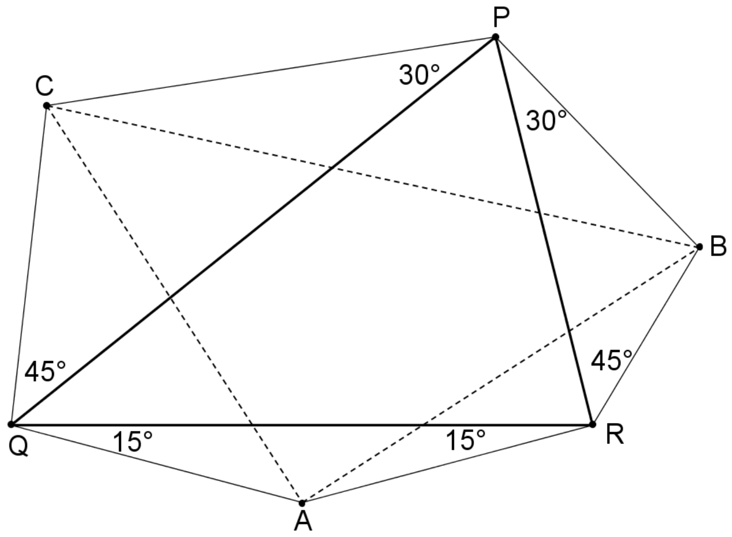
Svar på opgave 304 (November 2013)

Opgave:

ΔPQR er en vilkårlig trekant. Uden for trekanten afsættes punkterne A, B og C, så

$\angle PQC = \angle PRB = 45°$, $\angle QPC = \angle RPB = 30°$, $\angle AQR = \angle ARQ = 15°$.

Vis, at ΔABC er retvinklet og ligebenet.



Besvarelse:

1. metode

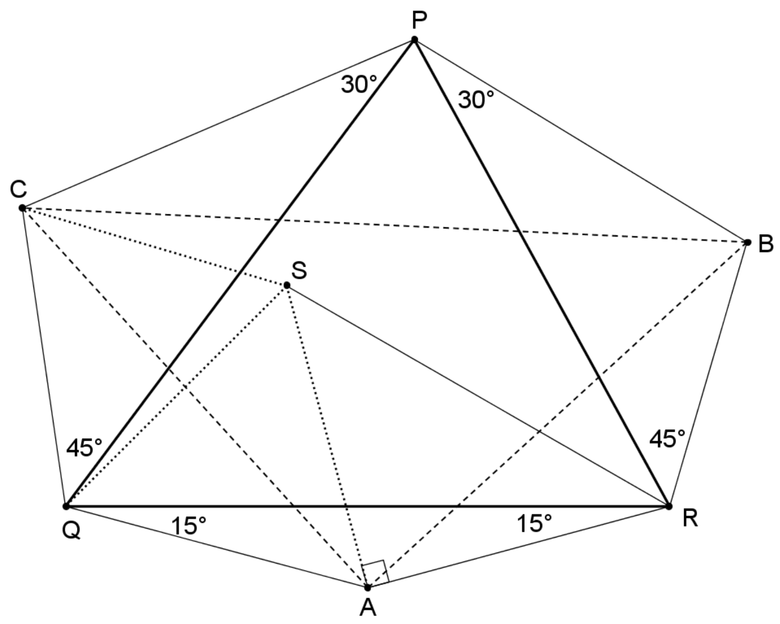
Vi angiver først en løsning med syntetisk plangeometri.

Vi foretager en drejning på 90° om A i positiv omløbsretning, så R føres over i S. Så er $AR = AS = AQ$. Vi har, at $\angle QAR = 150°$, så $\angle QAS = 60°$, og da $AS = AQ$, er ΔQAS ligesidet. Heraf følger

$$\angle SQR = \angle SQA - \angle RQA = 60° - 15° = 45°.$$

Da ΔARS er ligesidet og retvinklet, er $\angle ARS = 45°$, så $\angle QRS = 30°$. Dermed er ΔPCQ og ΔRSQ ensvinklede, så

$$\frac{QC}{QS} = \frac{QP}{QR} . \qquad (1)$$



Nu er

$$\angle CQS = \angle PQS + 45° = \angle PQR\ ,$$

og da forholdet mellem de sider, der i ΔCQS danner $\angle CQS$ og de sider, der i ΔPQR danner $\angle PQR$ efter (1) er det samme, er ΔCQS og ΔPQR ensvinklede. Dette medfører, at

$$\frac{CS}{PR} = \frac{CQ}{PQ}\ , \tag{2}$$

og da ΔPCQ og ΔPBR er ensvinklede, er

$$\frac{CQ}{PQ} = \frac{BR}{PR}\ . \tag{3}$$

Altså er efter (2) og (3):

$$\frac{CS}{PR} = \frac{BR}{PR}\ ,$$

så $CS = BR$. Som nævnt oven for er ΔCQS og ΔPQR ensvinklede, så $\angle CSQ = \angle PRQ$, hvoraf

$$\angle CSA = \angle CSQ + \angle QSA = \angle CSQ + 60° = \angle PRQ + 60° = \angle PRQ + 45° + 15° = \angle BRA\ .$$

Nu har vi fundet, at

$$\angle CSA = \angle BRA \quad , \quad SC = RB \quad , \quad SA = RA\ ,$$

og dermed er ΔCSA og ΔBRA kongruente. Så følger, at $AC = AB$ og $\angle SAC = \angle RAB$.
Altså er

$$\angle BAC = \angle BAS + \angle SAC = \angle BAS + \angle RAB = \angle RAS = 90°.$$

Dermed er det ønskede bevist.

2. metode

Vi viser dernæst en (ikke så elegant) trigonometrisk løsning.

I ΔQCP er

$$\frac{CP}{\sin 45°} = \frac{QC}{\sin 30°} = \frac{PQ}{\sin 105°}$$

hvoraf

$$QC = \frac{PQ \cdot \sin 30°}{\sin 75°} = \frac{2 \cdot PQ \cdot \sin 15° \cdot \cos 15°}{\cos 15°} = 2 \cdot PQ \cdot \sin 15° \ ,$$

og

$$PC = \frac{PQ \cdot \sin 45°}{\sin 75°} = \frac{PQ}{\sqrt{2} \cdot \cos 15°} \ .$$

I ΔAQR får vi

$$\frac{AQ}{\sin 15°} = \frac{QR}{\sin 150°} \quad \Leftrightarrow \quad AQ = \frac{QR \cdot \sin 15°}{\sin 30°} = 2 \cdot QR \cdot \sin 15° = BR \ .$$

I ΔBPR er

$$\frac{PB}{\sin 45°} = \frac{PR}{\sin 105°} \quad \Leftrightarrow \quad PB = \frac{PR \cdot \sin 45°}{\sin 75°} = \frac{PR}{\sqrt{2} \cdot \cos 15°} \ .$$

Endelig får vi ved hjælp af cosinusrelationen i i ΔACQ:

$$AC^2 = CQ^2 + QA^2 + 2 \cdot CQ \cdot QA \cdot \cos(Q + 60°)$$

$$= 4 \cdot PQ^2 \cdot \sin^2 15° + 4 \cdot QR^2 \cdot \sin^2 15° - 2 \cdot 2 \cdot PQ \cdot \sin 15° \cdot 2 \cdot QR \cdot \sin 15° \cdot \cos(Q + 60°)$$

$$= 4 \cdot \sin^2 15° \cdot (PQ^2 + QR^2 - 2 \cdot PQ \cdot QR \cdot (\cos Q \cdot \cos 60° - \sin Q \cdot \sin 60°))$$

$$= 4 \cdot \sin^2 15° \cdot (PQ^2 + QR^2 - PQ \cdot QR \cdot (\cos Q - \sqrt{3} \sin Q))$$

$$= 4 \cdot \sin^2 45° \cdot \left(PQ^2 + QR^2 - PQ \cdot QR \cdot \frac{PQ^2 + QR^2 - PR^2}{2 \cdot PQ \cdot QR} + PQ \cdot QR \cdot \sin Q \cdot \sqrt{3} \right)$$

$$= 4 \cdot \sin^2 15° \cdot \left(\tfrac{1}{2}(PQ^2 + QR^2 + PR^2) + 2T\sqrt{3} \right) .$$

Her er T arealet af ΔPQR.

I ΔBRA er

$$AB^2 = BR^2 + AR^2 - 2 \cdot BR \cdot AR \cdot \cos(R + 60°) \ ,$$

og efter trælse regninger magen til ovenstående, opnår vi

$$AB^2 = 4 \cdot \sin^2 15° \cdot \left(\tfrac{1}{2}(PQ^2 + QR^2 + PR^2) + 2T\sqrt{3} \right) .$$

Dermed er vist, at $AB = AC$.

Nu får vi i ΔPBC:

$$BC^2 = PC^2 + PB^2 - 2 \cdot PC \cdot PB \cdot \cos(P + 60°)$$

$$= \frac{PQ^2}{2\cos^2 15°} + \frac{PR^2}{2\cos^2 15°} - 2 \cdot \frac{PQ}{\sqrt{2} \cdot \cos 15°} \cdot \frac{PR}{\sqrt{2} \cdot \cos 15°} \cdot \cos(P + 60°)$$

$$= \frac{1}{2\cos^2 15°} \cdot \left(PQ^2 + PR^2 - 2 \cdot PQ \cdot PR \cdot \cos(P + 60°) \right)$$

$$= \frac{1}{2\cos^2 15°} \cdot \left(PQ^2 + PR^2 - 2 \cdot PQ \cdot PR \cdot (\cos P \cdot \cos 60° - \sin P \cdot \sin 60°) \right)$$

$$= \frac{1}{2\cos^2 15°} \cdot \left(PQ^2 + PR^2 - PQ \cdot PR \cdot (\cos P - \sqrt{3} \cdot \sin P) \right)$$

$$= \frac{1}{2\cos^2 15°} \cdot \left(PQ^2 + PR^2 - PQ \cdot PR \cdot \cos P + \sqrt{3} \cdot PQ \cdot PR \cdot \sin P) \right)$$

$$= \frac{1}{2\cos^2 15°} \cdot \left(PQ^2 + PR^2 - PQ \cdot PR \cdot \frac{PQ^2 + PR^2 - QR^2}{2 \cdot PQ \cdot PR} + 2\sqrt{3} \cdot T \right)$$

$$= \frac{1}{2\cos^2 15°} \left(\tfrac{1}{2}(PQ^2 + PR^2 + QR^2) + 2T\sqrt{3} \right)$$

$$= \frac{1}{4\cos^2 15°} \left(PQ^2 + PR^2 + QR^2 + 4T\sqrt{3} \right)$$

Nu er

$$AC^2 + AB^2 = 4 \cdot \sin^2 15° \cdot (PQ^2 + QR^2 + PR^2 + 4T\sqrt{3}) \ ,$$

og da endelig

$$\frac{1}{4\cos^2 15°} = 4\sin^2 15° \ ,$$

er $AC^2 + AB^2 = BC^2$, så den omvendte Pythagoras fuldender beviset.

3. metode

Vi betegner sidelængderne i ΔABC og ΔPQR med a, b, c og p, q, r. Desuden sætter vi

$$x = AQ = AR \ , \ y = RB \ , \ z = BP \ , \ t = PC \ , \ u = CQ \ .$$

I ΔQCP er

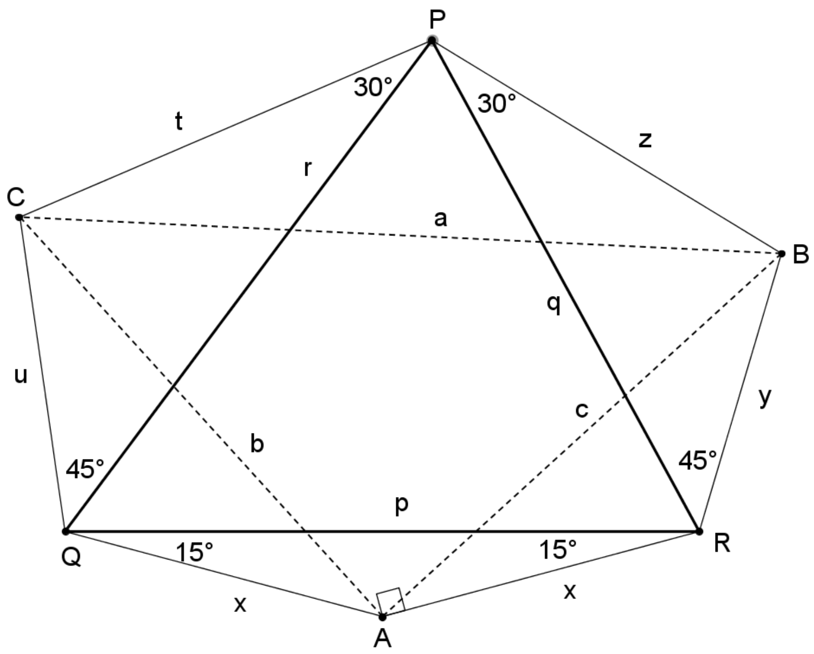
$$\frac{u}{\sin 30°} = \frac{r}{\sin 105°} \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{r}{2\sin 105°} \ ,$$

og i ΔPBR er

$$\frac{y}{\sin 30°} = \frac{q}{\sin 105°} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{q}{2\sin 105°} \ .$$

I den ligebenede ΔQAR er

$$\cos 15° = \frac{\frac{1}{2}p}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{p}{2\cos 15°} = \frac{p}{2\sin 105°} \ .$$



Vi sætter

$$k = \frac{1}{2\cos 105°} \ ,$$

så $x = kp$, $y = kq$ og $u = kr$.

Cosinusrelationen i ΔAQC giver

$$b^2 = x^2 + u^2 - 2xu\cdot\cos(60° + Q) = k^2(p^2 + r^2 - 2pr\cdot\cos(60° + Q))$$
$$= k^2(p^2 + r^2 - 2pr\cdot\cos 60°\cdot\cos Q + 2pr\cdot\sin 60°\cdot\sin Q) \ .$$

Heri indsættes

$$\cos Q = \frac{p^2 + r^2 - q^2}{2pr} \ ,$$

så vi får

$$b^2 = \tfrac{1}{2}k^2\left(p^2 + q^2 + r^2 + 2pr\sqrt{3}\cdot\sin Q\right) \ . \qquad (4)$$

Cosinusrelationen i ΔARB giver

$$c^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cdot\cos(60° + R) = k^2(p^2 + q^2 - 2pq\cdot\cos(60° + R))$$
$$= k^2(p^2 + q^2 - 2pq\cdot\cos 60°\cdot\cos R + 2pq\cdot\sin 60°\cdot\sin R)$$

Heri indsættes

$$\cos R = \frac{p^2 + q^2 - r^2}{2pq} \ ,$$

så vi får

$$c^2 = \tfrac{1}{2}k^2\left(p^2 + q^2 + r^2 + 2pq\sqrt{3}\cdot\sin R\right). \qquad (5)$$

Altså får vi ag (4) og (5), at

$$b^2 - c^2 = \tfrac{1}{2}k^2\left(2pr\sqrt{3}\cdot\sin Q - 2pq\sqrt{3}\cdot\sin R\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad b^2 - c^2 = k^2 p\sqrt{3}\left(r\cdot\sin Q - q\cdot\sin R\right) \ , \qquad (6)$$

og da sinusrelationen i ΔPQR giver

$$\frac{r}{\sin R} = \frac{q}{\sin Q} \quad \Leftrightarrow \quad r \cdot \sin Q = q \cdot \sin R$$

giver (6), at

$$b^2 - c^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = c \ .$$

Dermed er ΔABC ligebenet.

Derefter viser vi, at ΔABC der retvinklet. I ΔPQC fås

$$\frac{t}{\sin 45°} = \frac{u}{\sin 30°} \quad \Leftrightarrow \quad t = u\sqrt{2} \ ,$$

og i ΔPBR er

$$\frac{z}{\sin 45°} = \frac{y}{\sin 30°} \quad \Leftrightarrow \quad z = y\sqrt{2} \ .$$

I ΔCPB giver cosinusrelationen

$$a^2 = t^2 + z^2 - 2tz\cdot\cos(60° + P) = 2u^2 + 2y^2 - 4uy\cdot\cos(60° + P)$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 = 2k^2(r^2 + q^2 - 2rq\cdot\cos(60° + P)) \ . \tag{7}$$

I ΔPQR er

$$\cos P = \frac{q^2 + r^2 - p^2}{2qr} \ ,$$

og når dette indsættes i (7) fås

$$a^2 = 2k^2 \left(r^2 + q^2 - 2rq\cdot\cos 60°\cdot\cos P + 2rq\cdot\sin 60°\cdot\sin P\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 = k^2(p^2 + q^2 + r^2 + 2qr\sqrt{3}\,\sin P) \ . \tag{8}$$

Af (4), (5) og (8) får vi

$$b^2 + c^2 - a^2 = k^2\sqrt{3}\left(pr\cdot\sin Q + pq\cdot\sin R - 2qr\cdot\sin P\right) . \tag{9}$$

I ΔPQR betegner vi med R_0 radius i den omskrevne cirkel, så sinusrelationen giver

$$\sin P = \frac{p}{2R_0} \quad , \quad \sin Q = \frac{q}{2R_0} \quad , \quad \sin R = \frac{r}{2R_0} \ .$$

Af (9) får vi

$$b^2 + c^2 - a^2 = k^2\sqrt{3}\left(pr\cdot\frac{q}{2R_0} + pq\cdot\frac{r}{2R_0} - 2qr\cdot\frac{p}{2R_0}\right) = 0 \ .$$

Dermed er $b^2 + c^2 = a^2$, hvilket medfører, at ΔABC er retvinklet med $A = 90°$.